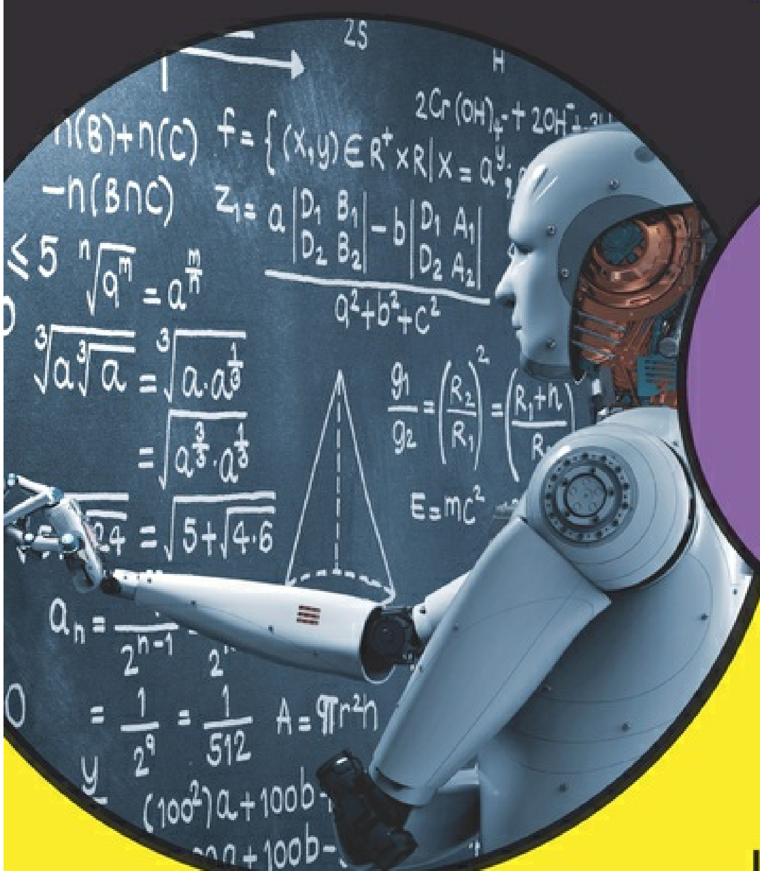
LERNEN LEICHTER GEMACHT

3. Auflage

Mathematik für Ingenieure I

für dummies®



Mit Vektoren und Matrizen rechnen

Taylorreihen bestimmen, Funktionen ableiten und Integrale knacken

Mit vielen Übungsaufgaben

J. Michael Fried

von $:=$ steht, durch das, was rechts davon steht. Zum Beispiel definiert

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

das Summenzeichen $\sum$ mit Laufindex i von 1 bis n durch die Summe der Größen a_1, a_2 bis a_n.

Manchmal drehe ich das Symbol um: $B =: A$ bedeutet dann, dass ich A durch B definiere. Der Doppelpunkt entscheidet also darüber, was wodurch definiert wird. Er steht grundsätzlich auf derselben Seite des Gleichheitszeichens wie der zu definierende Ausdruck.

Weder bei Definitionen noch bei Abkürzungen ist etwas zu beweisen. Allerdings sollten Sie sich immer Gedanken machen, ob eine Definition sinnvoll ist. »Eine ganze Zahl n heißt unmöglich, falls gilt $n = 1$ und gleichzeitig $n = 0$.« Offensichtlich gibt es keine »unmöglichen Zahlen«, daher ist die Definition nicht besonders nützlich.

Wörter verbinden: die Aussage

Im Gegensatz zu einer Definition ist $A = B$ eine Aussage, die wahr oder falsch sein kann, wie zum Beispiel $1 = 1$, $1 = 0$ … Umgangssprachliche Sätze wie »die Sonne scheint« oder »bei Regen ist die Straße nass« sind genauso Aussagen wie mathematische Sätze: »In jedem rechtwinkligen ebenen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypothenusenquadrats« oder »17 ist die einzige gerade Zahl, die keine Primzahl ist«. Während die erste Aussage (der *Satz des Pythagoras*) bekanntlich wahr ist, gibt es doch begründete Zweifel an der zweiten … Mathematische Aussagen sind Behauptungen, deren Wahrheitsgehalt untersucht werden muss. Sie sollten bewiesen oder widerlegt werden.

Es gibt noch eine weitere Sorte von mathematisch-logischen Aussagen, die in einem gewissen Sinne zwischen Definition und Behauptung stehen. Das sind die so genannten *Axiome*. Ein Axiom können Sie sich als Beschreibung einer bestimmten unmittelbar einleuchtenden Eigenschaft vorstellen. Axiome sind Aussagen, die nicht abgeleitet oder bewiesen werden. Üblicherweise verwenden Mathematiker Axiome, um bestimmte mathematische Objekte zu beschreiben, meist in einer besonders grundlegenden, nicht einfach abzukürzenden Definition. Die natürlichen Zahlen sind dafür ein gutes Beispiel.

Rasiermesserscharfe Logik – eine Basis für alle Mathematik

Da Aussagen wahr oder falsch sein können, müssen sie bewiesen oder widerlegt werden:

Da $\frac{17}{2} = 8$ Rest 1, ist 17 keine gerade Zahl. Also ist die Aussage falsch.

Ob die Sonne scheint, können Sie mit einem Blick aus dem Fenster leicht selbst feststellen. Ähnlich werden Sie die regennasse Straße sofort einsehen – falls die Straße nicht gerade überdacht ist, ist diese Folgerung schlicht und einfach logisch.

Logisch? Jawohl. In der Mathematik ist Logik das einzig funktionierende Mittel, Aussagen zu beweisen (oder zu widerlegen). Niemand würde auf den Gedanken kommen, über die Wahrheit einer mathematischen Behauptung abzustimmen. Nun, fast niemand.

Stellen Sie sich vor, A und B seien Aussagen. Dann ist »aus A folgt B« ebenfalls eine Aussage: ein ***Satz***. Wie können Sie diesen Satz beweisen (oder widerlegen)? Dazu gibt es grob gesehen vier verschiedene Methoden:

- ✔ **der direkte Beweis:** Beim direkten Beweis folgert man von A ausgehend so lange mit Hilfe gegebener Axiome und bereits bewiesener Sätze weitere wahre Aussagen, bis schließlich die Aussage B herauskommt.
- ✔ **der indirekte Beweis:** Der indirekte Beweis benutzt die logische Tatsache, dass »aus A folgt B« genau dasselbe bedeutet wie »wenn B nicht gilt, dann gilt auch nicht A« und startet bei »B gilt nicht« um mittels eines direkten Beweises dann zu folgern: »Auch A gilt nicht«.
- ✔ **der Widerspruchsbeweis:** Eine besondere Variante des indirekten Beweises ist der Widerspruchsbeweis. Dabei wird angenommen, dass einerseits die Aussage B falsch ist, obwohl andererseits A als geltend angenommen wird. Dann zeigt man, dass dies zu einem Widerspruch zur Aussage A, den Axiomen oder bereits bewiesenen Sätzen führt. Die direkte Folgerung aus diesem Widerspruch: Die ursprüngliche Annahme war falsch, B muss wahr sein.
- ✔ **die vollständige Induktion:** Der Induktionsbeweis ist eine Variante des direkten Beweises für Aussagen, die mit natürlichen Zahlen zusammenhängen.

Mathematik ist logisch. Ohne Logik funktioniert Mathematik nicht. Logik wird oft schon beim Aufschreiben einer mathematischen Aussage verwendet. Mit Hilfe logischer und weiterer mathematischer Symbole wird eine Behauptung viel präziser und klarer formuliert, als dies allein mit Worten möglich wäre. Logische Symbole sind kaum missverständlich, Aussagen lassen sich dadurch nicht nur einfacher formulieren und lesen, sondern meist auch leichter merken. Zum Beispiel kennen Sie den Satz des Pythagoras wahrscheinlich schon seit Ihrer Schulzeit in der Form: $a^2 + b^2 = c^2$.

Die Quadratur des Kreises und das π = 3.2-Gesetz

Die mathematische Frage, ob und wie mit Hilfe von Zirkel und Lineal zu einem gegebenem Kreis ein flächengleiches Quadrat konstruiert werden könnte, hatte schon die alten Griechen beschäftigt. Erst Jahrtausende später gelang es 1882 dem Mathematiker Ferdinand von Lindemann, zu beweisen, dass die *Quadratur des Kreises* prinzipiell nicht möglich ist. Eine beliebig genaue Berechnung der Kreiszahl $\pi \approx 3.14159265358979323846264 33\ldots$ ist allerdings möglich – falls Sie genügend Zeit und Rechenkapazität haben.

Obwohl seit 1882 also bekannt war, dass die Quadratur des Kreises unmöglich ist, beschäftigten sich Ende des 19. Jahrhunderts viele Hobbymathematiker weiterhin mit diesem Thema. So veröffentlichte der Arzt Edward J. Goodwin mehrere Arbeiten zur Kreisquadratur, nachdem er nach eigenen Angaben im Jahre 1888 auf »übernatürliche Art und Weise das exakte Maß des Kreises« erfahren hatte. Eine dieser Arbeiten wurde als Annonce Goodwins in der Zeitschrift »American Mathematical Monthly« abgedruckt. Obwohl diese Anzeige vom mathematischen Standpunkt aus nicht sehr klar ist, scheint es, als hätte Goodwin durch seine (falsche!) Konstruktionsmethode den Wert $\pi = 3.2$ berechnet.

Im Jahr 1897 wurde diese Konstruktionsmethode dem Staat Indiana von Goodwin unter der Voraussetzung, die Methode zum Gesetz zu erheben, kostenlos angeboten.

Angelockt von der Kostenfreiheit wurde nach einigen Runden in verschiedenen parlamentarischen Ausschüssen das Gesetz durch das Repräsentantenhaus von Indiana angenommen. Zur vollständigen Gesetzeskraft fehlte nun nur noch die Zustimmung des Senats. Zufällig war aber am Abstimmungstag der Mathematikprofessor Clarence A. Waldo im Repräsentantenhaus anwesend. Diesem gelang es in den folgenden Wochen den Senat zumindest davon zu überzeugen, sich nicht weiter mit diesem Gesetz zu befassen. Der endgültige Beschluss über das $\pi = 3.2$-Gesetz wurde auf unbestimmte Zeit vertagt – und ist auch heute noch nicht gefasst worden.

Logisch schreiben: Symbole, Symbole

Komplizierte mathematische Aussagen können oft überhaupt nicht mehr verbal ausgedrückt werden, ohne dass man sich dabei hoffnungslos verheddert. Die Symbolschreibweise ist da die einzige Rettung.

Verbreitet ist die Verwendung der symbolischen und formelhaften Sprache bei mathematischen Beweisen.

Abgesehen von den Rechensymbolen ($+, -, \cdot, \sum, \int, \ldots$) werden im wesentlichen die folgenden logischen Symbole verwendet:

- $A \Rightarrow B$ bedeutet »aus A folgt B«.
- $A \Leftrightarrow B$ bedeutet »A ist äquivalent zu B«.
- $\forall x$ bedeutet »für alle x «.

- ✔ $\exists x$ bedeutet »es existiert ein x «.
- ✔ $\neg A$ bedeutet »nicht A«, die logische Negation der Aussage A.
- ✔ $A \wedge B$ bedeutet »A und B«, beide Aussagen zusammen.
- ✔ $A \vee B$ bedeutet »A oder B«, mindestens eine der beiden Aussagen.

Mengen und Relationen

Wenn Sie jemand fragt, womit sich Mathematiker beschäftigen, dann denken Sie höchstwahrscheinlich an Zahlen. In einem gewissen Sinne sind Zahlen tatsächlich das Grundgerüst der Mathematik – aber den meisten Mathematikern begegnen Zahlen in ihrem Berufsleben so, wie allen anderen Menschen auch: als ein reines Hilfsmittel zum Messen und Zählen. Mathematiker betrachten dabei Objekte, die sie in Mengen zusammenfassen. Ob diese Objekte Zahlen sind oder etwas ganz anderes, ist dabei nicht so wichtig. Interessant und wichtig sind dagegen die Beziehungen, die *Relationen*, zwischen einzelnen Elementen oder Teilmengen dieser Mengen.

Bösartige Mengen und ein logischer GAU

Der Mathematiker Georg F. L. P. Cantor (1845–1918) erforschte die Grundlagen der Mathematik und ist der Begründer der mathematischen Mengenlehre. Von ihm stammt auch die Definition von Mengen aus dem Abschnitt »Eine Menge Mengen«. Ich verwende sie allerdings nur unter Vorbehalt: Zwar scheint Cantors Mengendefinition abgesehen von der etwas wunderlichen Sprache durchaus anschaulich und recht harmlos zu sein. Und doch enthält sie eine logische Falle, die streng genommen diese Definition des Begriffs Menge mathematisch absolut unbrauchbar macht. Denken Sie einmal nach. Mengen sind sicherlich »Objekte unseres Denkens«, also können Sie diese wieder zu Mengen zusammenfassen. Beispielsweise könnten Sie auf die Idee kommen, die Menge aller Teilmengen der natürlichen Zahlen zu bilden, die Potenzmenge von $\mathbb{N}$. Manche solcher Mengenmengen sind bei näherer Betrachtung ziemlich kompliziert. Zum Beispiel die Menge aller Mengen, die mehr als ein Element enthalten. Sie entdecken sofort mehrere Mengen, die darin enthalten sind: unter anderem die Mengen $\{1,2\}$ und $\{1,2,3\}$. Also mindestens zwei Elemente – oh … 2 ist mehr als 1, also ist die Menge aller »mehr als einelementigen Mengen« auch eine Menge mit mehr als einem Element. Und folglich muss sie sich selbst enthalten.

Bis hierher ist die Sache vielleicht verwirrend, aber noch kein eigentliches Unglück. Auch die Menge aller Mengen, die sich selbst enthalten, ist zwar eine Stufe verwirrender, aber immer noch kein wirkliches Problem. Die Falle schnappt aber zu, sobald Sie über die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, nachdenken: Diese Menge enthält sich genau dann selbst, wenn sie sich nicht selbst enthält.

Dieser Widerspruch, bekannt als die *Russel'sche Antinomie*, wird man nur mit einem längeren Ausflug in die Mengenlehre hin zur Kategorientheorie los. Das aber führt viel zu weit …

Glücklicherweise schnappt die Falle in den meisten praktischen Fällen nicht zu. Wir können also für den alltäglichen Gebrauch bei Cantors Definition bleiben, mit dem etwas vagen Zusatz, dass wir nur harmlose Mengen ohne solche Widersprüche betrachten.

Bei den Mengen fängt die Mathematik wirklich an. Alles, von Abbildungen bis hin zu Zahlen, wird in Mengen einsortiert und gegliedert. Es gibt – natürlich! – einige wenige Ausnahmen. Dazu mehr im Kasten »Bösartige Mengen und ein logischer GAU«. Grund genug sich den Begriff Menge ein wenig genauer ansehen.

Eine Menge Mengen

Ohne logische Widerhaken sauber zu beschreiben, was eine Menge wirklich ist, das ist gar nicht so einfach und führt direkt in die Tiefen mathematischer Grundlagenforschung. Zum Glück müssen Sie diesem Weg nicht weiter folgen und können sich mit der naheliegenden klassischen Definition nach Cantor begnügen:

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohl unterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Dabei wird vorausgesetzt, dass im Folgenden nur unproblematische Mengen auftreten, die nicht zu logischen Widersprüchen führen.

Die in einer Menge zusammengefassten Objekte nennt man ihre *Elemente*. Sind das endlich viele, dann kann die betreffende Menge prinzipiell einfach aufgeschrieben werden. Beispiele wie $\{1, 2, 3\}$ oder $\{a, b, c, d, e\}$ kennen Sie sicherlich seit Ihrer Schulzeit.

Dabei gilt:

- Zwischen den geschweiften Klammern stehen die einzelnen Elemente der Menge.
- Die Reihenfolge ist gleichgültig.
- Jedes Element muss einmal auftreten – darf aber durchaus auch mehrfach auftauchen.

Dass ein Element in der Aufzählung mehrfach auftreten darf, klingt zwar nicht besonders sinnvoll, ist aber bei komplizierten Aufzählungen recht nützlich.

Natürlich möchte niemand sehr große Mengen hinschreiben oder gar lesen. Eine explizite Aufzählung solcher Mengen ist nicht nur unübersichtlich, sondern oft nur theoretisch, aber nicht praktisch möglich.

In vielen Fällen wird daher die Lesbarkeit durch *Fortsetzungspunkte* verbessert:

Die Darstellung $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$ ist sofort verständlich und viel einfacher zu verwenden. Selbst einige unendlich große Mengen können auf diese Weise geschrieben