Günter Aumann

GEOMETRIE!

Mit Farben statt Formeln auf den Spuren Euklids

primus verlag

(II/4*) *Von drei verschiedenen Punkten einer Geraden liegt mindestens einer zwischen den beiden anderen.*

Nun sind wir in der Lage, den Begriff *Strecke* wie folgt einzuführen. Nimmt man zu zwei verschiedenen Punkten P, Q alle zwischen ihnen liegenden Punkte hinzu, so erhält man die *Strecke* $\overline{PQ}$ oder die *Verbindungsstrecke* dieser Punkte. Die zwischen P und Q gelegenen Punkte nennen wir die *inneren Punkte* der Strecke. Der Abstand der *Endpunkte* P, Q heißt die *Länge* der Strecke. Hat eine Strecke $\overline{AB}$ eine größere Länge als eine Strecke $\overline{CD}$, so sagen wir kurz, dass $\overline{AB}$ *größer* ist als $\overline{CD}$ und umgekehrt $\overline{CD}$ *kleiner* als $\overline{AB}$.

Wir können nicht nur Strecken messen, sondern auch eine Strecke einer beliebigen Länge l, die wir irgendwo in unserer Zeichnung finden, an jede gewünschte Stelle zeichnen, etwa auf einer Geraden g von einem Punkt A dieser Geraden aus abtragen (siehe Abbildung 1.4). Dies kann auf genau zwei Arten geschehen, da der Punkt A die Gerade g in zwei punktfremde Mengen zerlegt. Diese Möglichkeit,

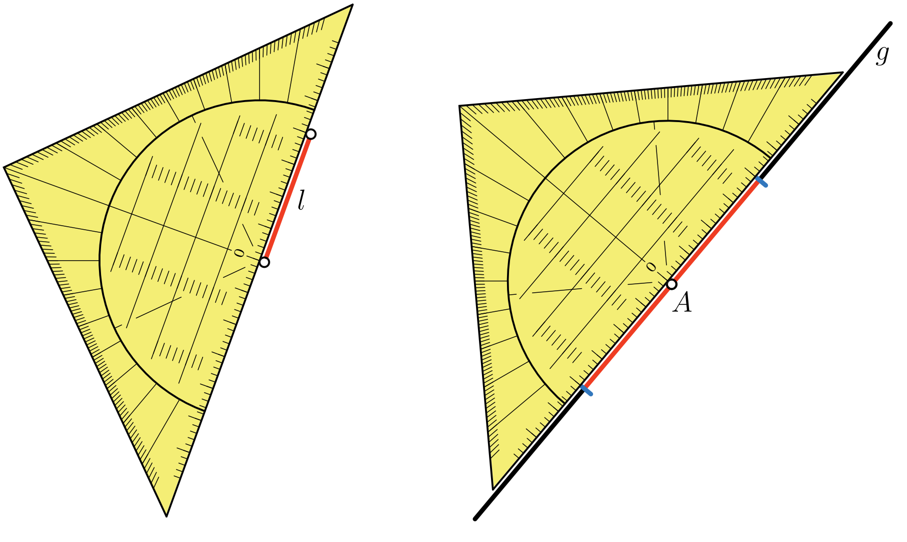

Abbildung 1.4: Strecken abtragen

eine Gerade durch jeden ihrer Punkte in zwei Teile zu zerlegen, nehmen wir in unser Axiomensystem auf. Dazu brauchen wir ein Kriterium, wie wir diese beiden Teile der Geraden g unterscheiden können, wie wir also für zwei Punkte P, Q dieser Geraden entscheiden können, ob sie auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten von A liegen. Dabei hilft uns wieder die Zwischenbeziehung. P und Q liegen genau dann auf verschiedenen Seiten von A, wenn A zwischen ihnen liegt. Das halten wir fest im nächsten Axiom.

(III/1) *Jeder Punkt A einer Geraden g teilt g (ohne A) so in zwei punktfremde Teilmengen, dass zwei von A verschiedene Punkte der Geraden g genau dann in verschiedenen Teilmengen liegen, wenn A zwischen ihnen liegt.*

Nimmt man zu den Teilmengen von Axiom (III/1) jeweils den Punkt A hinzu, enthält man die beiden *Halbgeraden* von g, die den *Anfangspunkt* A besitzen. Ist g die Gerade AB, so liegt B auf genau einer dieser Halbgeraden. Die Halbgerade, auf der B liegt, wird mit AB^+ bezeichnet, die andere mit AB^-. Genau der Anfangspunkt A liegt auf beiden Halbgeraden. Um uns einfacher ausdrücken zu können, nennen wir solche Halbgeraden *komplementär* (siehe Abbildung 1.5).

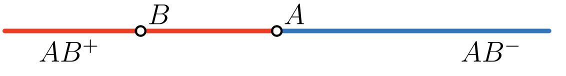

Abbildung 1.5: Komplementäre Halbgeraden

Wählen wir eine dieser Halbgeraden aus, finden wir auf ihr genau einen Punkt, der von A den gewünschten Abstand l hat. Da dies durch die bisherigen Axiome nicht garantiert wird, haben wir unser Axiomensystem entsprechend zu ergänzen. Wir tun dies so, dass auch die in Abbildung 1.6 gezeigte Operation ermöglicht wird. Man kann danach von jedem Punkt P aus die Strecke der Länge l so antragen, dass der Endpunkt auf einer gegebenen Geraden liegt – sofern diese Gerade nicht zu weit vom Punkt P entfernt ist. Wir präzisieren dies im folgenden Axiom.

(III/2) *Gibt es eine Strecke mit der Länge l und ist l größer als der Abstand der Punkte A und P, so gibt es auf jeder Halbgeraden mit dem Anfangspunkt A genau einen Punkt Q so, dass die Strecke $\overline{PQ}$ die Länge l hat.*

Man beachte, dass im Axiom (III/2) nicht ausgeschlossen ist, dass die Punkte A und P zusammenfallen. Da sie in diesem Fall den Abstand 0 haben, folgt aus dem Axiom insbesondere folgendes Axiom:

(III/2*) *Gibt es eine Strecke mit der Länge l, so gibt es auf jeder Halbgeraden genau einen Punkt, der vom Anfangspunkt den Abstand l besitzt.*

Da Axiom (III/2*) aus dem Axiom (III/2) folgt, kann man natürlich darauf verzichten (oder es als Satz formulieren). Wir formulieren es als Axiom, um zu sehen, wie weit wir mit dieser eingeschränkten Version kommen bzw. wo Axiom (III/2) unverzichtbar wird.

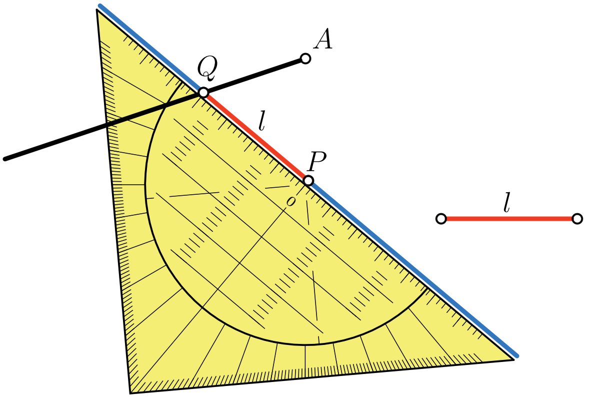

Abbildung 1.6: Strecken einpassen

Hilbert legt großen Wert darauf, in seinen Axiomen äußere Bezüge zu vermeiden. Er beschränkt sich auf die geometrisch notwendigen Begriffe wie Punkt oder Gerade. Der Begriff Zahl gehört nicht dazu. Daher ist er gezwungen, Axiome zu formulieren, die dafür sorgen, dass seine Geraden „so aussehen“ wie die reelle Zahlengerade.

Genau umgekehrt macht es Kolmogorov. Er verwendet in seinem Axiomensystem die reellen Zahlen nicht nur zur Längenmessung, sondern auch zur Erzeugung von Punkten und Strecken, indem er fordert, dass es zu jeder reellen Zahl eine Strecke dieser Länge gibt.

Das vorliegende Axiomensystem beschreitet einen Mittelweg. Zahlen werden nur verwendet, um Längen von Strecken zu messen, deren Existenz unser Axiomensystem ohne Verwendung von Zahlen garantiert. Eine Ausnahme macht lediglich die Zahl 1 in Axiom (II/2). Doch auch hier würde es genügen, die Existenz zweier Punkte P, Q und damit einer Strecke $\overline{PQ}$ zu fordern. Daran könnte man dann das Lineal (also die Zahlengerade) anlegen und darauf den Maßstab so wählen, dass 0 bei P und 1 bei Q liegt.

Um zur euklidischen Ebene zu kommen, die Hilbert vorgestellt hat, müsste man Axiom (III/2*) verschärfen und fordern, dass es zu jeder reellen Zahl l einen solchen Punkt gibt. Doch man kommt mit weniger Zahlen aus. Rationale Zahlen genügen allerdings nicht. Wir werden auf S. 125 sehen, dass die Zahlenmenge aufgrund unserer Axiome so beschaffen ist, dass man aus jeder (positiven) Zahl die Quadratwurzel ziehen kann. Wie $\sqrt{2}$ zeigt, ist dies für die rationalen Zahlen nicht richtig.

Doch darum brauchen wir uns nicht zu kümmern. Das in diesem Zusammenhang zentrale Axiom (III/2) sorgt dafür, dass wir mit einer hinreichend großen Zahlenmenge arbeiten.

Bisher haben wir das Geodreieck lediglich als Lineal (mit Markierung) benutzt.

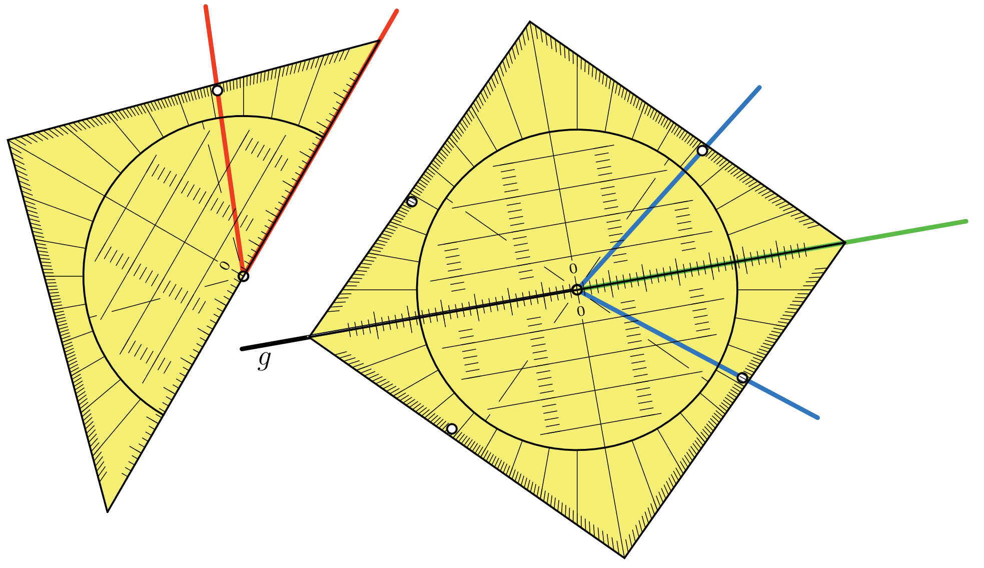

Abbildung 1.7: Winkel antragen

Die Möglichkeiten, die es darüber hinaus bietet, kommen zum Tragen, wenn wir Winkel betrachten. Wir können nämlich mit dem Geodreieck nicht nur Strecken, sondern auch Winkel übertragen. Dazu legen wir die Basis des Geodreiecks auf einen Schenkel eines gegebenen Winkels (rot in Abbildung 1.7), markieren den zweiten Schenkel durch einen Punkt auf dem Geodreieck und können nun diesen Winkel an jeder gewünschten Stelle antragen. Wir können etwa einen beliebigen Punkt als Scheitel wählen und verlangen, dass ein Schenkel des Winkels auf einer beliebigen Geraden g durch diesen Punkt zu liegen kommt. Wir sehen, dass es vier Möglichkeiten gibt, den Winkel so anzutragen (in Abbildung 1.7 wird das Geodreieck zweimal von vorne und zweimal von hinten betrachtet).

Geben wir statt der Geraden g eine Halbgerade von g vor (grün in Abbildung 1.7), bleiben zwei Möglichkeiten, diesen Winkel anzutragen (blau in Abbildung 1.7), nämlich auf jeder der beiden Seiten von g.

Diese beiden Seiten einer Geraden haben wir nun unabhängig von der Anschauung einzuführen. Wir gehen analog zu den Geraden vor: Wie jede Gerade durch einen ihrer Punkte in zwei Halbgeraden zerlegt wird, wird die Ebene durch jede Gerade h in zwei Halbebenen zerlegt. Wir brauchen wieder ein Kriterium, wie wir diese beiden Teile unterscheiden können, wie wir also für zwei Punkte P, Q entscheiden können, ob sie auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten von h liegen. Die Abbildung 1.8 kann uns weiterhelfen. Wir sehen, dass h genau dann einen Punkt der Strecke $\overline{PQ}$ enthält (also diese Strecke *schneidet*), wenn P und Q auf verschiedenen Seiten von h liegen. Daher formulieren wir:

(IV/1) *Jede Gerade h teilt die Ebene (ohne h) so in zwei punktfremde und nicht leere Teilmengen, dass zwei Punkte, die nicht auf h liegen, genau dann in verschiedenen Teilmengen liegen, wenn ihre Verbindungsstrecke die Gerade h schneidet.*

Nimmt man zu den Teilmengen von Axiom (IV/1) jeweils die Gerade h hinzu, erhält man die beiden *von h berandeten* (*komplementären*) *Halbebenen* (siehe Abbildung 1.8). Enthält eine der beiden von h berandeten Halbebenen die Punkte P und Q, so sagt man, dass P und Q *auf derselben Seite* von h liegen. (Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn einer der Punkte auf h liegt.) Andernfalls liegen sie *auf verschiedenen Seiten* von h. Letzteres ist also genau dann der Fall, wenn sich die Geraden PQ und h schneiden und der Schnittpunkt zwischen P und Q liegt.

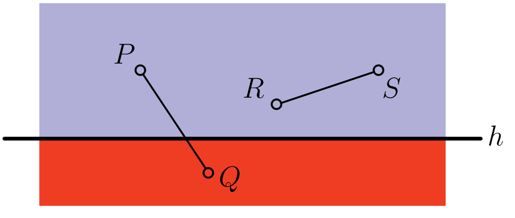

Abbildung 1.8: Komplementäre Halbebenen

Bevor wir uns weiter mit Winkeln beschäftigen können, haben wir sie zunächst in unserem Axiomensystem zu definieren. Dies gelingt mit Hilfe der Halbgeraden. Zur Erinnerung: Zwei verschiedene Halbgeraden SA^+ und SB^+, die denselben Anfangspunkt besitzen und auf derselben Geraden liegen, haben wir komplementär genannt. Nun betrachten wir zwei Halbgeraden SA^+ und SB^+, die denselben Anfangspunkt besitzen und *nicht* auf derselben Geraden liegen, und nennen ihre Vereinigung *Winkel* (siehe Abbildung 1.9). Der gemeinsame Anfangspunkt S

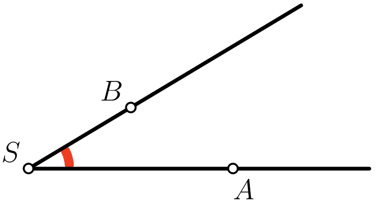

Abbildung 1.9: Zur Winkeldefinition

heißt der *Scheitel* des Winkels, die beiden Halbgeraden sind seine *Schenkel*. Wir bezeichnen den Winkel mit $\measuredangle(SA^+, SB^+)$ oder mit $\measuredangle ASB$.