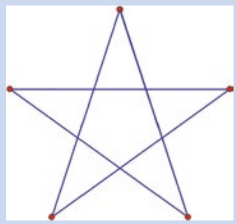
Beispiel: 5-zackiger Stern

Für $n = 5$ und $k = 2$ bedeutet dies: Verbinde jeden Eckpunkt eines regelmäßigen 5-Ecks mit dem zweitnächsten Eckpunkt (im Uhrzeigersinn). Es entsteht so ein regelmäßiger 5-zackiger Stern.

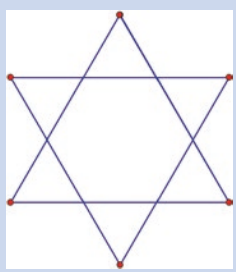
Weitere 5-zackige Sterne existieren nicht, denn für $n = 5$ und $k = 3$ erhält man den gleichen Stern. Statt jeden Punkt mit dem 3-nächsten Punkt im Uhrzeigersinn zu verbinden, kann man den Punkt auch mit dem 2-nächsten Punkt im Gegenuhrzeigersinn verbinden.



Beispiel: 6-zackiger Stern

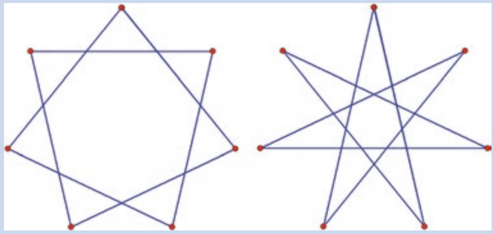
Auch für $n = 6$ existiert nur ein Typ. Er besteht aus 2 gleichseitigen 3-Ecken, denn $2 \cdot 3 = 6$.

Nummeriert man die Eckpunkte des n-Ecks im Uhrzeigersinn mit P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, dann ergeben sich 2 Streckenzüge: $P_0 - P_2 - P_4 - P_0$ und $P_1 - P_3 - P_5 - P_1$, also mit entweder geradem oder mit ungeradem Index.



Beispiel: 7-zackige Sterne

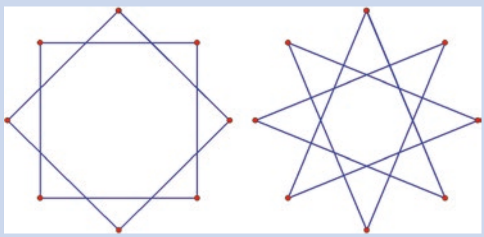
Für $n = 7$ gibt es zwei verschiedene Sterne, nämlich für $k = 2$ und für $k = 3$. Bei genauem Hinschauen sieht man, dass der 7-zackige Stern für $k = 2$ auch im Innern des Sterns für $k = 3$ entsteht (außerdem ein regelmäßiges 7-Eck).



Beispiel: 8-zackige Sterne

Auch für $n = 8$ gibt es zwei verschiedene Sterne, nämlich für $k = 2$ und für $k = 3$.

Der 8-zackige Stern für $k = 2$ entsteht auch im Innern des Sterns für $k = 3$. Er besteht aus 2 regelmäßigen 4-Ecken (Quadraten), denn $2 \cdot 4 = 8$.



Beispiel: 9-zackige Sterne

Für $n = 9$ gibt es sogar drei verschiedene Sterne.

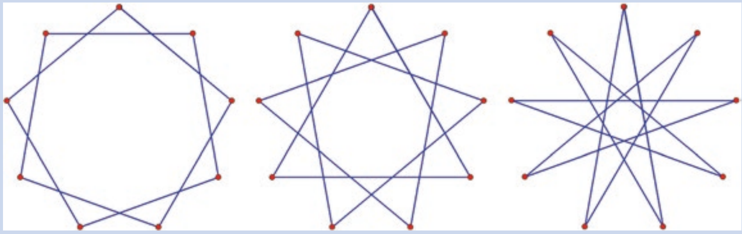
- $n = 9$, $k = 2$: Der Stern lässt sich als durchgehender Streckenzug zeichnen:

$$P_0 - P_2 - P_4 - P_6 - P_8 - P_1 - P_3 - P_5 - P_7 - P_0$$

- $n = 9$, $k = 3$: Der Stern besteht aus 3 regelmäßigen 3-Ecken, denn $3 \cdot 3 = 9$. Innen tritt der Stern für $k = 2$ auf.
- $n = 9$, $k = 4$: Der Stern lässt sich als durchgehender Streckenzug zeichnen:

$$P_0 - P_4 - P_8 - P_3 - P_7 - P_2 - P_6 - P_1 - P_5 - P_0$$

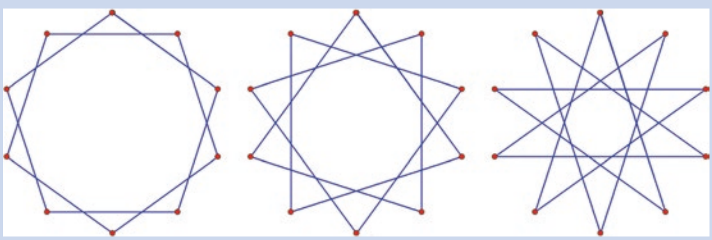
Innen tritt sowohl der Stern für $k = 2$ als auch für $k = 3$ auf.



Beispiel: 10-zackige Sterne

Auch für $n = 10$ gibt es drei verschiedene Sterne.

- $n = 10$, $k = 2$: Dieser Stern besteht aus 2 regelmäßigen 5-Ecken, denn $2 \cdot 5 = 10$.
- $n = 10$, $k = 3$: Der Stern lässt sich als durchgehender Streckenzug zeichnen.
- $n = 10$, $k = 4$: Dieser Stern besteht aus 2 Sternen vom Typ $n = 5$, $k = 2$. Zu diesen gehören die Streckenzüge $P_0 - P_4 - P_8 - P_2 - P_6 - P_0$ und $P_1 - P_5 - P_9 - P_3 - P_7 - P_1$.

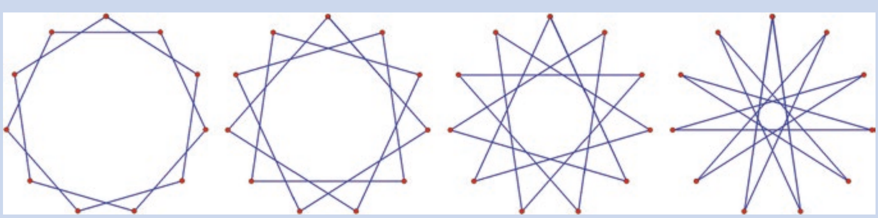


Beispiel: 11-zackige Sterne

Für $n = 11$ gibt es vier verschiedene Sterne, nämlich für $k = 2$, $k = 3$, $k = 4$ und $k = 5$.

Alle diese Sterne lassen sich als durchgehende Streckenzüge zeichnen.

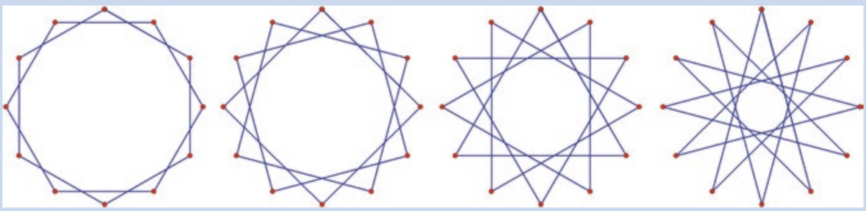
Im Innern treten jeweils alle Sterne mit kleinerem k auf.



Beispiel: 12-zackige Sterne
Für $n = 12$ gibt es vier verschiedene Sterne:

- $k = 2 : 2$ regelmäßige 6-Ecke, denn $2 \cdot 6 = 12$.
- $k = 3 : 3$ regelmäßige 4-Ecke (Quadrate), denn $3 \cdot 4 = 12$.
- $k = 4 : 4$ regelmäßige (gleichseitige) 3-Ecke, denn $4 \cdot 3 = 12$.

Nur der Stern für $k = 5$ lässt sich als durchgehender Streckenzug zeichnen.
Im Innern treten jeweils alle Sterne mit kleinerem k auf.



Folgende Eigenschaften lassen sich aus den Beispielen ablesen:

- Für jedes n, das größer ist als 4, existieren n-zackige Sterne.
- Für k kann man beliebige Zahlen einsetzen. Unterschiedliche Sternfiguren erhält man, wenn man in der Zeichenvorschrift folgende Werte einsetzt: k ist mindestens 2, bei geradzahligem n höchstens $\frac{n}{2} - 1$, bei ungeradzahligem n höchstens $\frac{n-1}{2}$.
  - Im Einzelnen gilt für ungeradzahlige n: Für $n = 5$ gibt es einen Stern für $k = 2$; für n $= 7$ gibt es zwei Sterne, nämlich für $k = 2$ und für $k = 3$; für $n = 9$ gibt es drei Sterne, nämlich für $k = 2$, für $k = 3$ und für $k = 4$; usw.
  - Im Einzelnen gilt für geradzahlige n: Für $n = 6$ gibt es einen Stern für $k = 2$; für $n = 8$ gibt es zwei Sterne, nämlich für $k = 2$ und für $k = 3$; für $n = 10$ gibt es drei Sterne, nämlich für $k = 2$, für $k = 3$ und für $k = 4$; usw.
- Bezeichnet man irgendeinen Punkt als Beginn eines Streckenzuges mit der Nummer 0, dann gehen die Streckenzüge durch die Punkte mit den Nummern $0{-}k{-}2k{-}3k{-}\cdots$, und ähnlich wie bei der Uhr werden die Nummern jeweils um n verringert, wenn das Vielfache von k die Zahl n erreicht oder darüber hinausgeht.
- In jedem n-zackigen Stern sind im Innern für jedes mögliche $k > 2$ weitere n-zackige Sterne enthalten.
- Manche Sternfiguren lassen sich zeichnen, ohne dass man absetzen muss; andere bestehen aus zwei oder mehr Vielecken oder Sternfiguren. Im Einzelnen gilt:
  - Ist k ein Teiler von n, dann besteht der Stern aus k Vielecken mit e Ecken, wobei $e = \frac{n}{k}$.
  - Haben k und n den gemeinsamen Teiler g, dann setzt sich der n-zackige Stern aus g Sternen mit $\frac{n}{g}$ Zacken zusammen.

– Wenn k und n zueinander teilerfremd sind, d. h., wenn sie nur die Zahl 1 als gemeinsamen Teiler haben, treten Sterne auf, die man als durchgehenden Streckenzug zeichnen kann. Umgekehrt gilt auch: Wenn ein Stern als durchgehender Streckenzug gezeichnet ist, dann sind k und n zueinander teilerfremd.

Regel

Sterne, die man als durchgehenden Streckenzug zeichnen kann

Für alle natürlichen Zahlen n, k mit $n > 4$ und $2 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$, falls n eine gerade Zahl ist, bzw. $2 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$, falls n eine ungerade Zahl ist, existieren regelmäßige n-zackige Sterne.

Dann und nur dann lassen sich die Sterne als durchgehenden Streckenzug zeichnen, wenn n und k zueinander teilerfremd sind.

Da bei den regelmäßigen n-zackigen Sterne sowohl die Zackenanzahl n als auch der Parameter k eine wesentliche Rolle spielen, werden sie oft mit der symbolischen Schreibweise {n/k} notiert, dem sogenannten **Schläfli-Symbol** (benannt nach dem Schweizer Mathematiker Ludwig Schläfli (1814–1895), der sich insbesondere mit regelmäßigen Vielecken (Polygonen), Vielflächnern (Polyedern) und deren Verallgemeinerung in höheren Dimensionen beschäftigte).

Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

A 1.1: Beantworten Sie die folgenden Fragen für $n = 13$, $n = 15$ und für $n = 18$ (also für eine ungerade oder eine gerade Anzahl von Eckpunkten): Für welche k (Mindest- und Höchstwert) erhält man einen n-zackigen Stern? Wie viele verschiedene Sternfiguren sind dies? Welche der möglichen Sternfiguren lassen sich als durchgehenden Streckenzug zeichnen, welche bestehen aus mehreren Sternen, welche aus mehreren Vielecken? Welche Punkt-Nummern treten bei den möglichen Streckenzügen auf (Beginn der Streckenzüge beim Punkt mit der Nummer 0)?

A 1.2: In den folgenden Abbildungen sind gleich große Flächenstücke jeweils gleich gefärbt. Wie hängt die Anzahl der Farben von der Art des Sterns, also von den Werten für n und k ab?