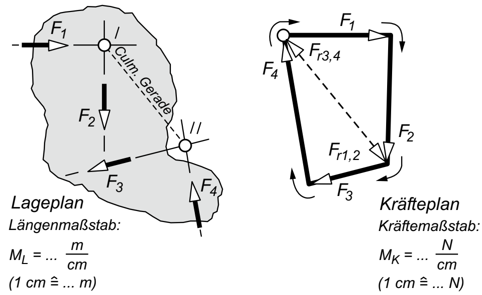
## 1.5 Vier-Kräfte-Verfahren, zeichnerisch

Vier nichtparallele Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn die Resultierenden je zweier Kräfte ein geschlossenes Krafteck bilden und eine gemeinsame Wirklinie (die Culmann'sche Gerade) haben

Lageplan des frei gemachten Körpers zeichnen und darin die Wirklinien der Belastungen und Lagerkräfte festlegen.

Wirklinien je zweier Kräfte zum Schnitt I und II bringen. Gefundene Schnittpunkte zur Wirklinie der beiden Resultierenden verbinden (der Culmann'schen Geraden).




Kräfteplan mit der nach Betrag, Lage und Richtungssinn bekannten Kraft beginnen.

Kräfteplan mit der Culmann'schen Geraden und den Wirklinien der anderen Kräfte schließen.

Die Kräfte eines Schnittpunkts im Lageplan ergeben ein Teildreieck im Kräfteplan.

## 1.6 Schlusslinienverfahren

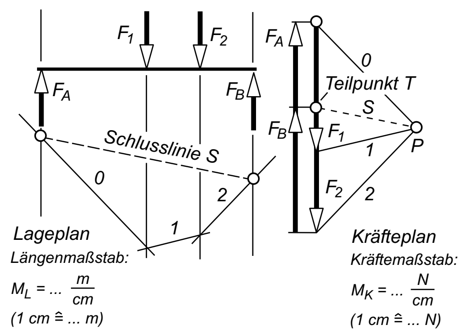
Das Schlusslinienverfahren ist universell anwendbar, insbesondere für parallele Kräfte bzw. solche, die sich nicht auf dem Zeichenblatt zum Schnitt bringen lassen. Seileck und Krafteck müssen sich schließen.

Lageplan des frei gemachten Körpers mit Wirklinien aller Kräfte zeichnen.

Krafteck aus den gegebenen Belastungskräften zeichnen.

Pol P beliebig wählen; Polstrahlen zeichnen.

Seilstrahlen im Lageplan zeichnen, Anfangspunkt bei parallelen Kräften beliebig, sonst Anfangsseilstrahl durch Lagerpunkt des zweiwertigen Lagers legen.




Anfangs- und Endseilstrahl mit den Wirklinien der Stützkräfte zum Schnitt bringen.

Verbindungslinie der gefundenen Schnittpunkte als „Schlusslinie" im Seileck zeichnen.

Schlusslinie S in den Kräfteplan übertragen und damit Teilpunkt T festlegen.

Stützkräfte nach zugehörigen Seilstrahlen in das Krafteck einzeichnen.

## 1.7 Rechnerische Gleichgewichtsbedingungen

Wie werden *rechnerisch* unbekannte Kräfte ermittelt?

Analytische Lösung:

$$\begin{array}{rlcl} \text{I. } \Sigma F_x = 0 & & & \Sigma M_{(\mathrm{I})} = 0 \\ \text{II. } \Sigma F_y = 0 & & \text{oder} & \Sigma M_{(\mathrm{II})} = 0 \\ \text{III. } \Sigma M = 0 & & & \Sigma M_{(\mathrm{III})} = 0 \end{array}$$

Die Momentengleichgewichtsbedingungen können für jeden beliebigen Punkt (auch außerhalb des Körpers) angesetzt werden.

Lageskizze des frei gemachten Körpers zeichnen.

Alle Kräfte – auch die noch unbekannten – in ihre Komponenten zerlegen.

Gleichgewichtsbedingungen ansetzen.

Meist enthält Gleichung III nur eine Unbekannte – damit beginnen.

Bei negativem Betrag für eine berechnete Kraft zum Schluss den angenommenen Richtungssinn umkehren.

Auch der dreimalige Ansatz der Momentengleichgewichtsbedingung führt zum Ziel. Aber: Die drei Punkte I, II, III dürfen nicht auf einer Geraden liegen

1 Statik

## 1.8 Knotenschnittverfahren

Lageskizze des freigemachten Fachwerkträgers zeichnen, die Knotenpunkte mit römischen Ziffern und die Stäbe mit arabischen Ziffern kennzeichnen.

Stützkräfte mit I. $\Sigma\, F_x = 0$; II. $\Sigma\, F_y = 0$; III. $\Sigma\, M_{(\mathrm{D})} = 0$ berechnen.

Stabwinkel aus der Lageskizze berechnen.

Alle am Knoten wirkenden Kräfte in ein rechtwinkliges Koordinatensystem eintragen.

Pfeilrichtung immer vom Knoten weg eintragen.

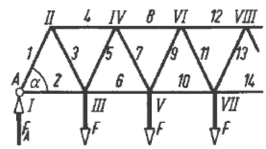
Beginnen mit dem Knoten, der nur zwei unbekannte Stabkräfte hat.

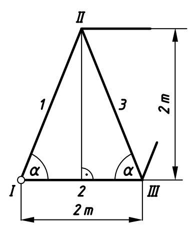
Mit I. $\Sigma\, F_x = 0$; II. $\Sigma\, F_y = 0$ die Stabkräfte berechnen.

*Hinweis:* Negative Beträge müssen mit ihrem Vorzeichen in Folgerechnungen übernommen werden.

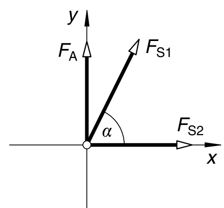
Stabkräfte in eine Tabelle für Zug- und Druckkräfte eintragen.

*Lageskizze*




*Berechnung der Stabwinkel*




*Knoten I*

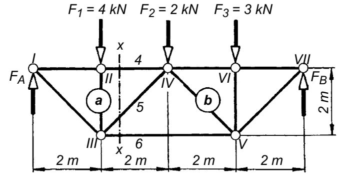
$$\alpha = \arctan \frac{2\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m}} = 63{,}4°$$

## 1.9 Ritter'sches Schnittverfahren

Rechnerische Bestimmung einzelner Stabkräfte

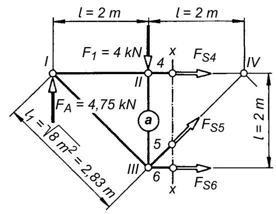
Lageskizze des Fachwerks zeichnen.

Stützkräfte mit
I. $\Sigma F_x = 0$; II. $\Sigma F_y = 0$; III. $\Sigma M_{(D)} = 0$
berechnen.




Fachwerk durch einen Schnitt (x–x) trennen. Der Schnitt darf höchstens drei Zweigelenkstäbe treffen, sie dürfen keinen gemeinsamen Knoten haben.

Lageskizze des abgeschnittenen Trägerteils (a) zeichnen, dabei die unbekannten Stabkräfte als Zugkräfte annehmen.




Die drei Momenten-Gleichgewichtsbedingungen $\Sigma M = 0$ aufstellen und auswerten.

Positives Ergebnis → Zugstab, negatives Ergebnis → Druckstab

**Beispiel:**
$\Sigma M_{(III)} = 0 = -F_{S4}\, l - F_A\, l$
$F_{S4} = (-F_A\, l) / l = -4{,}75$ kN (Druckstab)

## 1.10 Schwerpunktsbestimmung

Die Lage des Schwerpunkts einer beliebigen Linie oder Fläche wird *rechnerisch* mit dem darauf zugeschnittenen *Momentensatz* (1.2) bestimmt, *zeichnerisch* mit dem *Seileckverfahren* (1.3).

Dabei fasst man die Einzellinien oder Einzelflächen als parallele Kräfte auf und bestimmt den Wirkabstand der Resultierenden von einer beliebigen Bezugsachse. Das ist dann der gesuchte Schwerpunktsabstand.

Momentensatz für zusammengesetzte Flächen (Bohrungen haben entgegengesetzten Drehsinn)

Schwerpunktsabstand in y-Richtung

$$A\,x_0 = A_1\,x_1 + A_2\,x_2 + \ldots + A_n\,x_n$$

$$x_0 = \frac{\Sigma A_n\,x_n}{\Sigma A_n}$$

Schwerpunktsabstand in y-Richtung

$$A\,y_0 = A_1\,y_1 + A_2\,y_2 + \ldots + A_n\,y_n$$

$$y_0 = \frac{\Sigma A_n\,y_n}{\Sigma A_n}$$

| $n$ | $A_n$ | $x_n$ | $y_n$ | $A_n\,x_n$ | $A_n\,y_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | | |
| | $A = \Sigma A_n$ | | | $\Sigma A_n\,x_n$ | $\Sigma A_n\,y_n$ |

$A_1, A_2$ ... die bekannten Teilflächen in $mm^2$ oder $cm^2$

$x_1, x_2$ … $y_1, y_2$ … die bekannten Schwerpunktsabstände der Teilflächen von den Bezugsachsen in mm oder cm

$A$ die Gesamtfläche $(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)$ in $mm^2$ oder $cm^2$

$x_0, y_0$ die Schwerpunktsabstände der Gesamtfläche von den Bezugsachsen in mm oder cm

**Momentensatz für zusammengesetzte Linienzüge**

Schwerpunktsabstand in x-Richtung

$$l\,x_0 = l_1\,x_1 + l_2\,x_2 + \ldots + l_n\,x_n$$

$$x_0 = \frac{\Sigma l_n\,x_n}{\Sigma l_n}$$

Schwerpunktsabstand in y-Richtung

$$l\,y_0 = l_1\,y_1 + l_2\,y_2 + \ldots + l_n\,y_n$$

$$y_0 = \frac{\Sigma l_n\,y_n}{\Sigma l_n}$$

| $n$ | $l_n$ | $x_n$ | $y_n$ | $l_n\,x_n$ | $l_n\,y_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | | |
| | $l = \Sigma l_n$ | | | $\Sigma l_n\,x_n$ | $\Sigma l_n\,y_n$ |

$l_1, l_2$ ... die bekannten Teillängen in mm oder cm

$x_1, x_2$ … / $y_1, y_2$ … die bekannten Schwerpunktsabstände der Teillinien von den Bezugsachsen in mm oder cm

$l$ die Gesamtlänge ($l_1 + l_2 + \ldots + l_n$) des Linienzugs in mm oder cm

$x_0, y_0$ die Schwerpunktsabstände des Linienzugs von den Bezugsachsen in mm oder cm

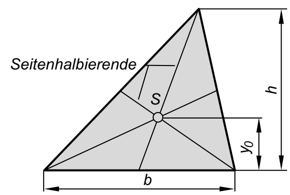
1 Statik

## 1.11 Flächenschwerpunkt

**Dreiecks-Schwerpunkt**

$$y_0 = \frac{h}{3}$$

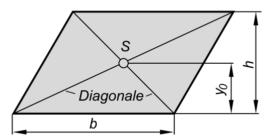
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$




**Parallelogramm-Schwerpunkt**

$$y_0 = \frac{h}{2}$$

$$A = b \cdot h$$

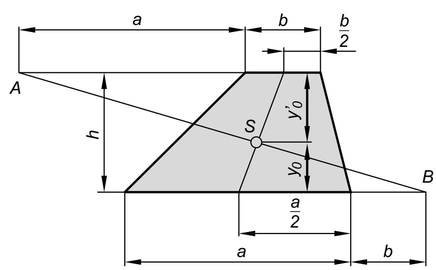



**Trapez-Schwerpunkt**

$$y_0 = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2b}{a + b}$$

$$y_0' = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a + b}{a + b}$$

$$A = \frac{a + b}{2} \cdot h$$



**Kreisausschnitt-Schwerpunkt**

$$y_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{Rs}{b} \qquad b = \frac{2R\alpha^\circ \pi}{180^\circ}$$

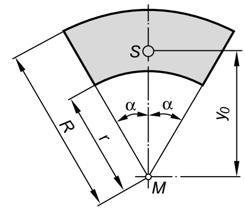
$$s = 2R\sin\alpha$$

$y_0 = 0{,}4244\ R$ für Halbkreisfläche

$y_0 = 0{,}6002\ R$ für Viertelkreisfläche

$y_0 = 0{,}6366\ R$ für Sechstelkreisfläche

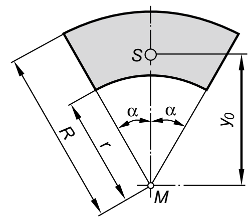
$$A = \frac{r^2\alpha}{57{,}3^\circ}$$




**Kreisringausschnitt-Schwerpunkt**

$$y_0 = 38{,}197 \cdot \frac{(R^3 - r^3)\sin\alpha}{(R^2 - r^2)\ \alpha^\circ}$$

$$A = \frac{R^2 - r^2\alpha}{57{,}3^\circ}$$



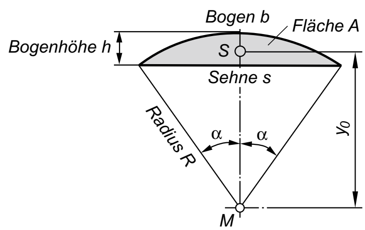

**Kreisabschnitt-Schwerpunkt**

$$y_0 = \frac{s^3}{12A}$$

$$A = \frac{R(b - s) + sh}{2}$$

$$h = 2R\sin^2(\alpha/2)$$

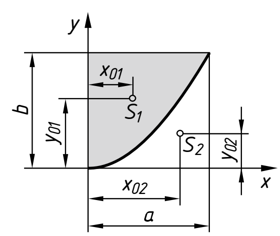
$$s = 2R\sin\alpha$$




**Parabelfläche-Schwerpunkt**

$$x_{01} = \frac{3}{8}a \qquad x_{02} = \frac{3}{4}a$$

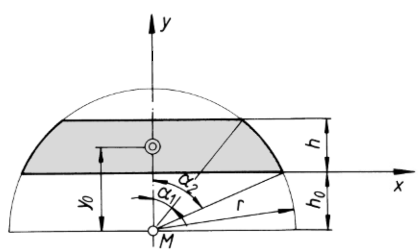
$$y_{01} = \frac{3}{5}b \qquad y_{02} = \frac{3}{10}b$$




**Kugelzone-Schwerpunkt**

$$y_0 = \frac{r}{2}\ (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)$$

$$y_0 = \frac{r}{2} \cdot \left(\frac{h + h_0}{r} + \frac{h_0}{r}\right) = \frac{h}{2} + h_0$$




## 1.12 Linienschwerpunkt

**Strecken-Schwerpunkt**

$$x_0 = \frac{l}{2}$$