LEHRBUCH

Klaus Höllig
Jörg Hörner

Aufgaben und Lösungen zur Höheren Mathematik 3

2. Auflage

EXTRAS ONLINE

Springer Spektrum

1.6 Rechenregeln für Gradient, Rotation und Divergenz

Die Matrizen

$$(\vec{F}|\partial_1\vec{F}\ \partial_2\vec{F}\ \partial_3\vec{F}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \end{array}\right), \quad (\vec{G}|\partial_1\vec{G}\ \partial_2\vec{G}\ \partial_3\vec{G}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

enthalten die Werte und partiellen Ableitungen zweier Vektorfelder $(F_1, F_2, F_3)^{\mathrm{t}}$ und $(G_1, G_2, G_3)^{\mathrm{t}}$ an einem Punkt (x_1, x_2, x_3). Bestimmen Sie $\operatorname{grad}(\vec{F}\cdot\vec{G})$, $\operatorname{rot}(3\vec{F}+2\vec{G})$ und $\operatorname{div}(\vec{F}\times\vec{G})$ an der gleichen Stelle.

Verweise: Rechenregeln für Differentialoperatoren

Lösungsskizze

(i) $\vec{D} = \operatorname{grad}(\vec{F}\cdot\vec{G})$:

$$D_i = \partial_i \sum_{k=1}^{3} F_k G_k = \sum_k (\partial_i F_k) G_k + \sum_k F_k (\partial_i G_k) = \partial_i\vec{F}\cdot\vec{G} + \vec{F}\cdot\partial_i\vec{G}$$

Einsetzen der Werte (Spalte 1) und partiellen Ableitungen (Spalten 2-4) an der Stelle $x \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} D_1 &= (1,\,0,\,5)^{\mathrm{t}}\cdot(1,\,0,\,2)^{\mathrm{t}} + (0,\,4,\,0)^{\mathrm{t}}\cdot(0,\,3,\,0)^{\mathrm{t}} &&= 11+12 = 23 \\ D_2 &= (0\cdot 1 + 3\cdot 0 + 0\cdot 2) + (0\cdot 4 + 4\cdot 0 + 0\cdot 5) &&= 0 \\ D_3 &= (2\cdot 1 + 0\cdot 0 + 6\cdot 2) + (0\cdot 0 + 4\cdot 6 + 0\cdot 0) &&= 38 \end{aligned}$$

(ii) $\vec{D} = \operatorname{rot}(3\vec{F}+2\vec{G})$:

Linearität $\quad\Longrightarrow\quad \vec{D} = 3\operatorname{rot}\vec{F} + 2\operatorname{rot}\vec{G}$

$\operatorname{rot}\vec{H} = (\partial_2 H_3 - \partial_3 H_2,\ \partial_3 H_1 - \partial_1 H_3,\ \partial_1 H_2 - \partial_2 H_1)^{\mathrm{t}}$, Einsetzen der Werte mit $H = F$ und $H = G \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{F} &= (0-0,\ 2-5,\ 0-0)^{\mathrm{t}} &&= (0,\ -3,\ 0)^{\mathrm{t}} \\ \operatorname{rot}\vec{G} &= (5-6,\ 0-0,\ 3-4)^{\mathrm{t}} &&= (-1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{t}} \end{aligned}$$

und $\vec{D} = 3(0,\ -3,\ 0)^{\mathrm{t}} + 2(-1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{t}} = (-2,\ -9,\ -2)^{\mathrm{t}}$

(iii) $d = \operatorname{div}(\vec{F}\times\vec{G})$:

$H_i = (\vec{F}\times\vec{G})_i = \sum_{j,k}\varepsilon_{i,j,k}F_j G_k$, Antisymmetrie des ε-Tensors $\quad\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} d &= \sum_i \partial_i H_i = \sum_{i,j,k}\varepsilon_{i,j,k}\left((\partial_i F_j)G_k + F_j(\partial_i G_k)\right) \\ &= \sum_k G_k \sum_{i,j}\varepsilon_{k,i,j}\partial_i F_j - \sum_j F_j \sum_{i,k}\varepsilon_{j,i,k}\partial_i G_k = \vec{G}\cdot\operatorname{rot}\vec{F} - \vec{F}\cdot\operatorname{rot}\vec{G} \end{aligned}$$

Einsetzen der Werte aus (ii) $\quad \rightsquigarrow$

$$d = (1,\ 0,\ 2)^{\mathrm{t}}\cdot(0,\ -3,\ 0)^{\mathrm{t}} - (0,\ 4,\ 0)^{\mathrm{t}}\cdot(-1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{t}} = 0 - 0 = 0$$

1.7 Differentiation von Skalar-, Vektor- und Spatprodukten

Berechnen Sie für die spiralförmige Bahnkurve

$$C:\ t \mapsto \vec{r}(t) = (\cos(2t),\, \sin(2t),\, t)^{\mathrm{t}}$$

$\vec{v} = \vec{r}\,'$ sowie $\vec{a} = \vec{v}\,'$ und leiten Sie die Produkte $\vec{r}\cdot\vec{v}$, $\vec{r}\times\vec{v}$, $[\vec{r},\, \vec{v},\, \vec{a}]$ ebenfalls nach t ab.

Verweise: Weg, Produktregel

Lösungsskizze

erste und zweite Ableitungen von $\vec{r} = (\cos(2t),\, \sin(2t),\, t)^{\mathrm{t}}$

$$\begin{aligned}\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} &= (-2\sin(2t),\, 2\cos(2t),\, 1)^{\mathrm{t}}\\ \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} &= (-4\cos(2t),\, -4\sin(2t),\, 0)^{\mathrm{t}}\end{aligned}$$

Ableitung der verschiedenen Produkte mit der Produktregel: Summe der Produkte, bei denen jeweils nur einer der Faktoren abgeleitet wird

Verwendung der Abkürzungen $C := \cos(2t)$, $S := \sin(2t)$ sowie $C' = -2S$, $S' = 2C$

(i) Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}(\vec{r}\cdot\vec{v})' &= \vec{r}\,'\cdot\vec{v} + \vec{r}\cdot\vec{v}\,' = \vec{v}\cdot\vec{v} + \vec{r}\cdot\vec{a}\\ &= ((-2S)^2 + (2C)^2 + 1^2) + (C(-4C) + S(-4S) + 0) = 1\end{aligned}$$

(ii) Vektorprodukt:

$$\begin{aligned}(\vec{r}\times\vec{v})' &= \vec{r}\,'\times\vec{v} + \vec{r}\times\vec{v}' = \vec{v}\times\vec{v} + \vec{r}\times\vec{a}\\ &= (0,\, 0,\, 0)^{\mathrm{t}} + \vec{r}\times\underbrace{(-4C,\, -4S,\, -4t+4t)^{\mathrm{t}}}_{=-4\vec{r}+(0,\,0,\,4t)^{\mathrm{t}}}\\ &\underset{\vec{r}\times\vec{r}=\vec{O}}{=} (C,\, S,\, t)^{\mathrm{t}}\times(0,\, 0,\, 4t)^{\mathrm{t}} = 4t\,(S,\, -C,\, 0)^{\mathrm{t}}\end{aligned}$$

(iii) Spatprodukt:

$$p := [\vec{r},\, \vec{v},\, \vec{a}]' = \big\{[\vec{v},\, \vec{v},\, \vec{a}] + [\vec{r},\, \vec{a},\, \vec{a}]\big\} + [\vec{r},\, \vec{v},\, \vec{a}\,']$$

$\{\ldots\} = 0$, da Spatprodukte mit zwei gleichen (oder linear abhängigen) Vektoren verschwinden

$\vec{a}\,' = (8S,\, -8C,\, 0) = -4\vec{v} + (0,\, 0,\, 4)^{\mathrm{t}}$, $\quad [\vec{r},\, \vec{v},\, (-4\vec{v})] = 0 \quad \Longrightarrow$

$$p = \begin{pmatrix} C\\ S\\ t\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} -2S\\ 2C\\ 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 4\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} C\\ S\\ t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 8C\\ 8S\\ 0\end{pmatrix} \underset{C^2+S^2=1}{=} 8$$

1.8 Produktregeln für Differentialoperatoren

Berechnen Sie für

$$U = y^2 - xy, \quad \vec{F} = (0,\, -yz,\, z^2)^{\mathrm{t}}$$

$\operatorname{grad}(U \operatorname{div} \vec{F})$, $\operatorname{div}(\vec{F} \times \operatorname{grad} U)$ und $\operatorname{rot}(U \operatorname{rot} \vec{F})$.

Verweise: Rechenregeln für Differentialoperatoren, Gradient, Divergenz, Rotation

---

Lösungsskizze

(i) Separate Differentiation der Felder:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} U &= (\partial_x U,\, \partial_y U, \partial_z U)^{\mathrm{t}} \\
&= (-y,\, 2y - x,\, 0)^{\mathrm{t}} \\
\operatorname{div} \vec{F} &= \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z \\
&= 0 - z + 2z = z \\
\operatorname{rot} \vec{F} &= (\partial_y F_z - \partial_z F_y,\, \partial_z F_x - \partial_x F_z,\, \partial_x F_y - \partial_y F_x)^{\mathrm{t}} \\
&= (y,\, 0,\, 0)^{\mathrm{t}}
\end{aligned}$$

(ii) $\operatorname{grad}(UV) = V \operatorname{grad} U + U \operatorname{grad} V$:
Einsetzen von $V = \operatorname{div} \vec{F} \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(U \operatorname{div} \vec{F}) &= z(-y,\, 2y - x,\, 0)^{\mathrm{t}} + (y^2 - 2xy)(0,\, 0,\, 1)^{\mathrm{t}} \\
&= (-yz,\, 2yz - xz,\, y^2 - 2xy)^{\mathrm{t}}
\end{aligned}$$

(iii) $\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G}$:
$\vec{G} = \operatorname{grad} U \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} \vec{U} = \vec{0} \;\forall\, \vec{U}$ und

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\vec{F} \times \operatorname{grad} U) &= (-y,\, 2y - x,\, 0)^{\mathrm{t}} \cdot (y,\, 0,\, 0)^{\mathrm{t}} \\
&= -y^2
\end{aligned}$$

(iv) $\operatorname{rot}(U\vec{G}) = U \operatorname{rot} \vec{G} - \vec{G} \times \operatorname{grad} U$:
Einsetzen von $\vec{G} = \operatorname{rot} \vec{F} \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(U \operatorname{rot} \vec{F}) &= (y^2 - xy) \operatorname{rot}(y,\, 0,\, 0)^{\mathrm{t}} - (y,\, 0,\, 0)^{\mathrm{t}} \times (-y,\, 2y - x,\, 0)^{\mathrm{t}} \\
&= (y^2 - xy)(0,\, 0,\, -1)^{\mathrm{t}} - (0,\, 0,\, 2y^2 - xy)^{\mathrm{t}} \\
&= (0,\, 0,\, 2xy - 3y^2)^{\mathrm{t}}
\end{aligned}$$

1.9 Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten

Bestimmen Sie für $f(r) = \ln r$ und $\vec{r} = (x, y, z)^{\mathrm{t}} = r\vec{e}_r$

$$\operatorname{grad} f, \quad \Delta f, \quad \operatorname{div}(f\vec{r}), \quad \operatorname{rot}(f\vec{r}) .$$

Verweise: Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten

Lösungsskizze

Differentiation von $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ mit der Kettenregel

$$\partial_x r = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(2x) = x/r, \quad \partial_y r = y/r, \quad \partial_z r = z/r$$

(i) Gradient $\operatorname{grad} f = (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f)^{\mathrm{t}}$:

$$\partial_x \ln r = \frac{\partial \ln r}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{x}{r} = \frac{x}{r^2}$$

analoge Berechnung von $\partial_y \ln r$ und $\partial_z \ln r$ $\quad\rightsquigarrow$

$$\operatorname{grad} \ln r = (x, y, z)^{\mathrm{t}}/r^2 = \vec{r}/r^2 = \vec{e}_r/r$$

(ii) Laplace-Operator $\Delta f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f$:

Produkt- und Kettenregel $\quad\rightsquigarrow$

$$\partial_x^2 \ln r = \partial_x(x/r^2) = r^{-2} - 2(xr^{-3})(x/r) = r^{-2} - 2x^2 r^{-4}$$

Addition der entsprechenden Ausdrücke für $\partial_y^2 \ln r$ und $\partial_z^2 \ln r$ $\quad\rightsquigarrow$

$$\Delta \ln r = 3r^{-2} - \underbrace{(2x^2 + 2y^2 + 2z^2)}_{2r^2} r^{-4} = \frac{1}{r^2}$$

(iii) Divergenz $\operatorname{div} \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$:

$\operatorname{div}(f\vec{G}) = \operatorname{grad} f \cdot \vec{G} + f \operatorname{div} \vec{G}$ mit $f = \ln r$ und $\vec{G} = \vec{r}$ $\quad\rightsquigarrow$

$$\operatorname{div}(\ln r\, \vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^2} \cdot \vec{r} + \ln r\, (\partial_x x + \partial_y y + \partial_z z) = 1 + 3 \ln r$$

(iv) Rotation $\operatorname{rot} \vec{F} = (\partial_y F_z - \partial_z F_y, \partial_z F_x - \partial_x F_z, \partial_x F_y - \partial_y F_x)^{\mathrm{t}}$:

$\operatorname{rot}(f\vec{G}) = f \operatorname{rot} \vec{G} + \operatorname{grad} f \times \vec{G}$ mit $f = \ln r$ und $\vec{G} = \vec{r}$ $\quad\rightsquigarrow$

$$\operatorname{rot}(\ln r\, \vec{r}) = \ln r\, (\partial_y z - \partial_z y, \partial_z x - \partial_x z, \partial_x y - \partial_y x) + \frac{\vec{r}}{r^2} \times \vec{r} = \vec{0}$$

Alternative Lösung

Verwendung der Formeln für Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} &\operatorname{grad} f(r) = \partial_r f(r)\, \vec{e}_r, && \Delta f(r) = r^{-2}\partial_r(r^2 \partial_r f(r)) \\ &\operatorname{div}(f(r)\vec{e}_r) = r^2 \partial_r(r^2 f(r)), && \operatorname{rot}(f(r)\vec{e}_r) = \vec{0} \end{aligned}$$

1.10 Gradient und Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

Berechnen Sie für das Skalarfeld

$$U = \frac{z\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$\operatorname{grad} U$ und ΔU durch Transformation auf Kugelkoordinaten.

Verweise: Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten, Gradient, Laplace-Operator

---

Lösungsskizze

(i) Kugelkoordinaten:

$$x = rSc,\ y = rSs,\ z = rC, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

mit $C = \cos\vartheta$, $S = \sin\vartheta$, $c = \cos\varphi$, $s = \sin\varphi$,
zugeordnete orthonormale Basis

$$\vec{e}_r = (Sc,\ Ss,\ C)^{\mathrm{t}},\ \vec{e}_\vartheta = (Cc,\ Cs,\ -S)^{\mathrm{t}},\ \vec{e}_\varphi = (-s,\ c,\ 0)^{\mathrm{t}}$$

Koordinatentransformation des Feldes

$$\frac{z\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = U(x,y,z) = \Phi(r,\vartheta,\varphi) = \frac{(rC)(rS)}{r} = \frac{1}{2} r\sin(2\vartheta)$$

$\rightsquigarrow$ Anwendung der Formeln für Differentialoperatoren

(ii) Gradient:

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} U &= \partial_r \Phi \vec{e}_r + \frac{1}{r}\partial_\vartheta \Phi \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{rS}\partial_\varphi \Phi \vec{e}_\varphi \\ &= \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\vec{e}_r + \cos(2\vartheta)\vec{e}_\vartheta\end{aligned}$$

Einsetzen von $\sin(2\vartheta)/2 = CS$, $\cos(2\vartheta) = C^2 - S^2$ und Vereinfachung $\rightsquigarrow$

$$\operatorname{grad} U = (\cos^3\vartheta\cos\varphi,\ \cos^3\vartheta\sin\varphi,\ \sin^3\vartheta)^{\mathrm{t}}$$

(iii) Laplace-Operator:

$$\begin{aligned}\Delta U &= \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\Phi) + \frac{1}{r^2 S}\partial_\vartheta(S\partial_\vartheta\Phi) + \frac{1}{r^2S^2}\partial_\varphi^2\Phi \\ &= \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\partial_\vartheta\left(\sin(\vartheta) r\cos(2\vartheta)\right) \\ &= \frac{1}{r}\sin(2\vartheta) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left(r\cos\vartheta\cos(2\vartheta) - 2r\sin\vartheta\sin(2\vartheta)\right)\end{aligned}$$

Vereinfachung mit dem Additionstheorem für Kosinus $\rightsquigarrow$

$$\Delta U = \frac{\cos\vartheta\cos(2\vartheta) - \sin\vartheta\sin(2\vartheta)}{r\sin\vartheta} = \frac{\cos(3\vartheta)}{r\sin\vartheta}$$