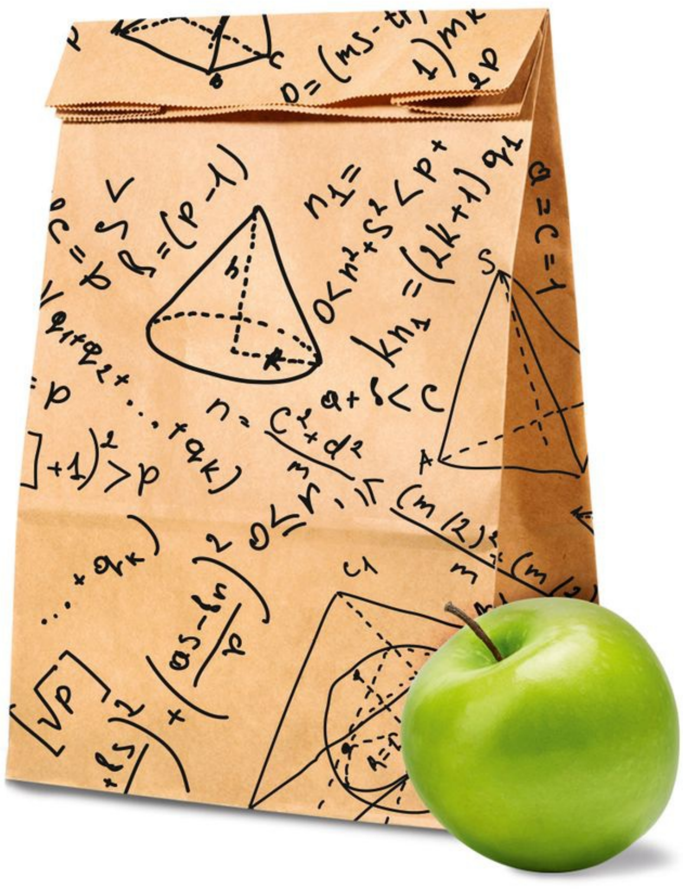
CHRISTIAN HESSE

MATHE TO GO



Magische Tricks für schnelles Kopfrechnen

C·H·Beck

4. Multiplikation

Heute ist Donnerstag. Und also Zeit für den Donners-Talk. Der besteht diesmal aus ein paar Gedankensplittern zu den Zahlensprechweisen anderer Länder, Völker und Kulturen: Die Franzosen benennen die Zahl 90 als quatre-vingt-dix, also als vier-zwanzig-zehn, was als Kurzform der Rechnung $4 \cdot 20 + 10$ zu verstehen ist. Weniger bekannt ist, dass die Waliser die Zahl 18 sprachlich als $2 \cdot 9$ erfassen und die Bretonen sie als $3 \cdot 6$ versprachlichen.

Noch vertrackter ist es im Alamblak, eine der Sprachen auf Papua-Neuguinea, wo die 18 verbal als $5 \cdot (2 + 1) + (2 + 1)$ konstruiert wird. Für Zahlensprechforscher eine wahre Delikatesse ist auch die afrikanische Sprache Nimbia, die ein kompliziertes Zwölfersystem einsetzt. Manches ist darin aber auch überraschend einfach und kurz. So lautet in Nimbia unser Zahlwort für $12 \cdot 12$, also *einhundertvierundvierzig* (24 Buchstaben), ganz schlicht *wo* (2 Buchstaben).

Das Große Einmaleins

Das Große Einmaleins ist der große Bruder des Kleinen Einmaleins. Und das Kleine Einmaleins wird in der Schule meistens durch stures Auswendiglernen eingepaukt.

Das ist nicht gut. Besser ist es, wenn man so wenig Gedächtnisarbeit wie möglich leisten muss und sich ansonsten auf Tricks und Tipps der Mathematik verlassen kann. Weiter oben hatten wir das mit dem Finger-Abakus bewerkstelligt. Das waren im wahrsten Sinne des Wortes einfache Fingerübungen. Und zwar für den Zahlenraum, der durch $1 \cdot 1$und $10 \cdot 10$ begrenzt ist.

Du kannst mich auch kreuzweise

Robert Recorde, übrigens der Erfinder des Gleichheitszeichens, gibt in seinem 1543 veröffentlichten Buch Grounde of Artes folgende Rechentechnik für Produkte aus dem Zahlenraum von 5 bis 9.
Soll etwa das Produkt $6 \cdot 8$ gebildet werden, so schreibt man zunächst diese beiden Zahlen untereinander.

6

Anschließend wird neben jede Zahl ihre Differenz zu 10 notiert.

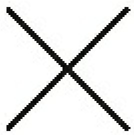
8

6 4

8 2

Dann verbindet man die beiden ursprünglichen Zahlen über Kreuz mit je einem Strich mit der Zehnerdifferenz der anderen. Fasst man die vier Zahlen als Ecken eines Quadrats auf, so bilden die Striche die beiden Diagonalen des Quadrats. Es gibt übrigens Historiker, die darin den Ursprung des Zeichens × für die Multiplikation sehen.

6 4



8 2

Von dieser Darstellung ausgehend gibt Robert Recorde das Rezept für die Ausführung der Rechnung. Die Lösung ist eine zweistellige Zahl. Man multipliziere die Zehnerdifferenzen, um die Einerstelle der Lösungszahl zu erhalten. Hier also $4 \cdot 2 = 8$. Dann nehme man irgendeine der beiden Ausgangszahlen und subtrahiere davon die Zehnerdifferenz, mit der sie durch einen Strich verbunden ist (hier also $6 - 2 = 4$ oder $8 - 4 = 4$). Dies ist die vordere Ziffer der Lösungszahl. Ergebnis 48. Falls bei der Berechnung der hinteren Ziffer ein zweistelliges Ergebnis auftritt, wird die Zehnerstelle dieses Ergebnisses der Rechnung für die vordere Lösungsziffer zugeschlagen.
Diese Methode war in Italien als «multiplicare per crocetta» (Multiplikation über Kreuz) bekannt und geht laut Leonardo di Pisa auf die Inder zurück.

Jetzt gehen wir zum Großen Einmaleins und berechnen $13 \cdot 17$. Das geht mit wenigen kleinen Schritten. Hier ist das Rezept:

Man nehme die erste Zahl (13), addiere die Einer (7) der zweiten Zahl, $13 + 7 = 20$, füge eine 0 an, 200, und addiere dazu das Produkt der Einer

($3 \cdot 7 = 21$) beider Zahlen. Ergibt: 221.

Mit derselben Methode bekommen wir $14 \cdot 19 = 266$, und zwar über diese Zwischenstufen:

$$14 \rightarrow 23 \rightarrow 230 \rightarrow 266.$$

So meistert ihr alle Produkte von Zahlen zwischen 10 und 19 leicht und schnell und fehlerfrei. Denn bei welchem dieser simplen Zwischenschritte gibt es mehr als ein vernachlässigbares Fehlerrisiko?

Und hier sind nun drei Face-to-face-Situationen für alle, die es selbst probieren wollen:

Rechne mich!

$$15 \cdot 18 = ?$$
$$12 \cdot 16 = ?$$
$$15 \cdot 15 = ?$$

Dieses Buch könnte den Eindruck erwecken, dass sich Mathematik schwerpunktmäßig mit Rechnen beschäftigt. Das scheint auch die landläufige Meinung zu sein. Dieser Eindruck rührt daher, dass Mathematik nun einmal mit Zahlen zu tun hat und mit Zahlen umzugehen in erster Linie bedeutet, mit ihnen zu rechnen. Man kann Mathematik allerdings auch ganz anders betreiben. Doch bleiben wir vorerst beim Rechnen.

In früheren Zeiten war das Alltagsrechnen gar nicht so einfach. Es dauerte Jahrtausende, bis die Menschheit Zahlensysteme gefunden hatte, mit denen sich leicht rechnen ließ. Viele Umwege mussten dafür gegangen werden und Sackgassen wurden beschritten. In einer dieser Sackgassen landeten die alten Römer.

Exkursion ins Zahlen-Römische

Jeder kennt die römischen Zahlzeichen. In der Schule werden sie bereits im 5. Schuljahr besprochen. Das römische Zahlsystem besteht aus Buchstaben mit verschiedenen Wertigkeiten, und zwar *M, D, C, L, X, V, I.* Konkret ist:

$$I = 1$$

$$V = 5$$

$$X = 10$$

$$L = 50$$

$$C = 100$$

$$D = 500$$

$$M = 1000$$

Es handelt sich im Prinzip um ein Additionssystem: Man nimmt von jedem Buchstaben einfach so viele, wie man braucht, um die Zahl als Summe darzustellen.

Ein paar Feinheiten gibt es dann noch für die Darstellung. Man ordnet die Buchstaben in der Reihenfolge *M, D, C, L, X, V, I.* Jeder Buchstabe kann nur dreimal hintereinander verwendet werden. Diese Einschränkung wird durch die Erlaubnis wettgemacht, einen geringerwertigen Buchstaben vor einen höherwertigen stellen zu dürfen, zusammen mit der daran geknüpften Vereinbarung, dass in dem Fall der kleinere Wert vom größeren abgezogen werden muss. Unserer Zahl 4 entspricht das römische *IV*, womit die Schreibweise *IIII* umgangen wird. Diese Zusatzregel macht die römischen Zahlzeichen zu einem Additions- und Subtraktionssystem.

Insofern sollten Addition und Subtraktion mit römischen Zahlzeichen recht einfach durchführbar sein.

Prüfen wir das!

Wie geht Addition?

Zuerst werden bei den beteiligten Zahlen eventuell eingebaute subtraktive Schreibweisen in additive umgewandelt. So wird aus *VL* gleich 45 das rein additive *XXXXV*. Dann hängt man die zu addierenden Zahlen einfach aneinander, sortiert die Buchstaben von groß nach klein, fasst intern zusammen (ersetzt also *IIIII* durch *V* usw.) und wandelt da, wo es möglich ist, wieder in eine subtraktive Schreibweise um.

Beispiel: **1347 + 294**

Römisch geschrieben ist dies:

$$MCCCXLVII + CCLXLIV$$

Um das auszurechnen, geht der Weg über mehrere Zwischenstufen, die selbsterklärend sind und deshalb kommentarlos folgen:

$$MCCCXXXXVII + CCLXXXXIIII$$
$$\rightarrow MCCCXXXXVIICCLXXXXIIII \rightarrow MCCCCCLXXXXXXXXVIIIIII \rightarrow MDLLXXXVVI \rightarrow$$

Zurückverwandelt ist das unsere Zahl **1641**.

Ähnlich geht's mit der Subtraktion $A - B$.

Wieder werden subtraktive Elemente zuerst in additive überführt. Dann werden Buchstaben gestrichen, die in beiden Zeichenketten vorkommen. Anschließend nehme man das größte verbleibende Symbol des Subtrahenden *B*, suche dafür das erste Symbol in *A*, welches größer ist als dieses, und expandiere es, indem man es vollständig mit dem nächstkleineren Buchstaben schreibt. Dann streiche man abermals die in beiden Zeichenketten gemeinsam auftretenden Buchstaben, wandle das kleinste verbleibende Symbol in *A* um, … Mache dies, bis bei der Zahl *B* rechts nichts mehr steht. Ist dieser Zustand erreicht, fasse man intern zusammen und gehe, falls nötig, zur subtraktiven Darstellung über. Ein Beispiel sagt mehr als all diese Worte.

Zum Beispiel: **247 − 178 = *CCXLVII − CLXXVIII***

Übersetze in additive Schreibweise: *CCXXXXVII − CLXXVIII*

Entferne gemeinsame Buchstaben: *CXX − LI*

Expandiere das *C: LLXX − LI*

Entferne gemeinsame Buchstaben: *LXX − I*

Expandiere das *X: LXVV − I*

Da es keine gemeinsamen Buchstaben gibt, expandiere ein *V: LXVIIIII − I*

Entferne gemeinsame Zeichen: *LXVIIII*

Übersetze in subtraktive Schreibweise: *LXIX*

Das Ergebnis ist: ***LXIX = 69***

Umständlich, nicht wahr?

Die römischen Ziffern eignen sich wunderbar, um Gebäude damit zu bestücken oder Ziffernblätter auf Uhren zu verzieren. Was man allerdings extrem schlecht damit anstellen kann, ist – ja rechnen. Schon die eben erlebte Subtraktion verläuft unrund, aber trotzdem nicht wirklich lästig. Das Multiplizieren wird aber dann doch zur Last. Im Gegensatz zum ganz üblen Dividieren haben die alten Römer hier immerhin noch einen Ausweg ins Scheinglück gefunden.

Produkte nach alter Römer Sitte

Die alten Römer haben nämlich die Multiplikation durch einen hübschen Trick auf Addition, Verdoppeln und Halbieren zurückgeführt. Mit dem ursprünglichen Zahlenpaar beginnend, wird die Zahl rechts stets verdoppelt und die Zahl links halbiert. Bei nicht ganzzahligem Ergebnis wird die Hälfte nach unten gerundet. Beides wird so lange wiederholt, bis durch wiederholtes Halbieren eine 1 entstanden ist.

Angenommen, es soll das Produkt $A \cdot B$ ausgerechnet werden.

Man legt dazu zwei Spalten an, die eine – links – wird mit der Zahl *A*