Tobias Martin

Mathematik-Studienhilfen

Finanzmathematik

Grundlagen – Prinzipien – Beispiele

2., aktualisierte Auflage

HANSER

Inhaltsverzeichnis

2 Kapital und Zinsen

2.1 Verzinsungsmodelle

In einer Volkswirtschaft besitzt jede (handelbare) Ware oder Dienstleistung einen Preis als den in Geld ausgedrückten Wert. Die Faktoren, welche die Höhe des Preises beeinflussen, sind dabei von ganz unterschiedlicher Natur. Stellt eine natürliche oder juristische Person (**Gläubiger**) einer anderen Person (**Schuldner**) vorübergehend Geld zur Verfügung (ein **Kapital**), so ist auch dies eine Dienstleistung. Der Schuldner entrichtet dem Gläubiger dafür i. Allg. ein Nutzungsentgelt, den **Zins** bzw. die **Zinsen**. Die Höhe der Zinsen hängt ab von

- der Höhe des Kapitals,
- der Dauer der Nutzung durch den Schuldner,
- dem speziell vereinbarten Zinssatz (s. u.).

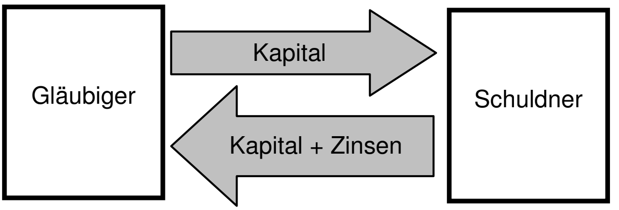

Bild 2.1:
Zahlungen zwischen
Gläubiger und Schuldner

In den meisten Fällen werden die Zinsen einmalig oder in regelmäßigen Zeitabständen fällig, d. h., der Schuldner muss dem Gläubiger die Zinsen zu einem bestimmten oder regelmäßig wiederkehrenden Zeitpunkten zahlen, solange er das Kapital des Gläubigers zur Verfügung hat. Bei der Art der Zahlung dieser Zinsen werden grundsätzlich zwei Formen unterschieden:

Modell 1: Direkte Zahlung der Zinsen an den Gläubiger zum Fälligkeitstermin

Modell 2: Gutschrift der Zinsen (beim Schuldner) und Saldierung zum Kapital

Die Fälligkeitszeitpunkte der Zinsen heißen **Zinszuschlags-** bzw. **Zinszahlungstermine**. Die (positive) Differenz zweier aufeinander folgender Zinszuschlagstermine bezeichnet man als **Zinsperiode**. Üblich sind Zinsperioden von einem Jahr, einem halben Jahr, einem Vierteljahr oder einem Monat. Beim Modell 1 bleibt die *Höhe der Schuld während der Nutzungsdauer des Kapitals unverändert*, weil die Zinsen an den vereinbarten Zinszahlungsterminen dem Gläubiger zufließen. Man spricht in diesem Fall von **einfachen** bzw. **linearen Zinsen**. Anders ist die Situation im Modell 2: Hier werden die Zinsen zwar einem Konto des Gläubigers gutgeschrieben, dieses Konto wird jedoch beim Schuldner geführt, dem diese Zinsen praktisch noch zur Verfügung stehen. Damit *erhöht sich das Kapital*, das der Schuldner zur Verfügung hat, um die jeweiligen Zinsen. Am nächsten Zinszahlungstermin sind dann Zinsen auf (schon gutgeschriebene) Zinsen fällig, die sog. **Zinseszinsen** (auch **geometrische Zinsen**). Bei beiden Formen handelt es sich um sog. **Verzinsungsmodelle**.

Oft wird vereinbart, dass über gewisse Zeiträume nur das anfangs zur Verfügung gestellte Kapital und nicht eventuelle, bereits früher gutgeschriebene Zinsen verzinst werden. Diese Form ist mathematisch dem Modell 1 äquivalent, selbst wenn der Gläubiger die Zinsen nicht sofort bekommt. Zwar ist dann eine solche Verfahrensweise finanzmathematisch inkorrekt, die einfache Verzinsung ist aber rechnerisch leichter zu handhaben und liefert für kurze Zeiträume Ergebnisse, die nicht gravierend von denen des Zinseszinsmodells abweichen.

Werden die Zinsen am Ende einer Zinsperiode fällig (Zinszuschlagstermin = letzter Tag der Zinsperiode), so spricht man von **nachschüssiger** (bzw. dekursiver) Verzinsung, sind sie jedoch bereits am Anfang einer Zinsperiode fällig (Zinszuschlagstermin = erster Tag der Zinsperiode), so liegt **vorschüssige** (bzw. antizipative) Verzinsung vor (Bild 2.2). Wir werden sehen, dass diese Unterscheidung aus Sicht der Finanzmathematik nur für Zinseszinsmodelle relevant ist.

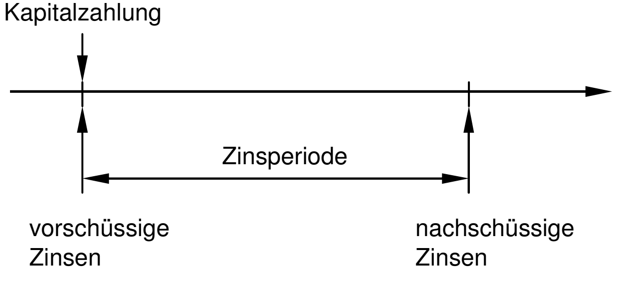

Bild 2.2:
Vor- und nachschüssige Verzinsung

Beispiel 2.1: *Vor- und nachschüssige Verzinsung*

Eine Bank (Gläubiger) stellt einem Kunden am 1.10.2007 ein Darlehen über 10.000 € zur Verfügung. Sie verlangt dafür bis zur Rückzahlung monatlich *nachschüssig* 100,00 € Zinsen. Wie lauten die Zinszahlungstermine?

Lösung: Zinszahlungstermine: 31.10.2007, 30.11.2007, 31.12.2007, 31.1.2008, ...
Wäre *vorschüssige* Zinszahlung vereinbart worden, so lauteten die Zinszahlungstermine: 1.10.2007 (= Auszahlungstermin), 1.11.2007, 1.12.2007, 1.1.2008, ... ■

Wir wollen nun folgende grundsätzlichen Vereinbarungen treffen, die im gesamten Buch Gültigkeit besitzen:

***Allgemeine Voraussetzungen*:**
Z1. Die *Zinsen* je Zinsperiode sind *proportional* dem zu Beginn der Periode zur Verfügung gestellten *Kapital*.
Z2. Die Zinsperiode ist ein ganzer Bruchteil eines Jahres.
Z3. Alle Zahlungen erfolgen *mit Sicherheit* zu den vorgesehenen Terminen.

Die *erste* Bedingung Z1 erscheint sinnvoll und garantiert die Linearität der Zinsen als Funktion des Kapitals, d. h.:

- Die Summe der Zinsen auf zwei Kapitalien ist stets gleich den Zinsen auf die Summe der Kapitalien. Es spielt also keine Rolle, ob ein bestimmter Geldbetrag insgesamt oder in Teilen verzinst wird.
- Die Zinsen auf das Vielfache eines Kapitals sind gleich diesem Vielfachen der Zinsen auf das einfache Kapital.

Dennoch findet man in der Praxis auch andere Modelle. So bieten zahlreiche Banken Sparkonten an, bei denen der Zinssatz gestaffelt ist und von der Höhe des Guthabens abhängt. Dabei wird für größere Kapitalwerte oft ein höherer Zinssatz gewährt, um den Sparer dazu anzuregen, einen möglichst großen Geldbetrag anzulegen. Ein weiterer Grund ist die Tatsache, dass die Kosten, die dem Kreditinstitut durch das Sparkonto entstehen, größtenteils nicht von der Höhe der Einlagen abhängen, so dass sie mit wachsendem Guthaben relativ gesehen abnehmen.

Die *zweite* Bedingung Z2 ist lediglich technischer Natur, um den Formelapparat nicht unnötig aufzublähen. Sie wird aber auch praktisch überall eingehalten, da Kreditinstitute und Finanzdienstleister spätestens nach Ablauf eines Jahres alle Konten abrechnen. Die *dritte* Voraussetzung Z3 schließt die Ausfallmöglichkeit von Zahlungen aus. Wollte man dies berücksichtigen, so wären Instrumente der Wahrscheinlichkeitsrechnung erforderlich.

2.2 Das 1-Perioden-Modell

Wir betrachten zunächst die Verzinsung in *einer* Zinsperiode. Sie beginne auf einer Zeitachse zum Zeitpunkt $t = 0$ und soll bei $t = 1$ enden.

***1-Perioden-Modell*:**
- Die Verzinsung eines Kapitals wird nur über eine Zinsperiode betrachtet.
- Geldflüsse (sowohl Kapital als auch Zinsen) können nur zu Beginn und am Ende der Zinsperiode erfolgen. Anders gesagt: Nur Beginn ($t = 0$) und Ende ($t = 1$) der Zinsperiode sind mögliche **Handelszeitpunkte** für die Ware Geld.

Zu Beginn stellt der Gläubiger dem Schuldner ein bestimmtes Kapital $K > 0$ zur Verfügung. Dafür soll er Zinsen in Höhe von Z erhalten. Aufgrund von Voraussetzung Z1 ist Z proportional zu K, es gibt also einen (von K unabhängigen) Proportionalitätsfaktor i, so dass gilt

$$Z = K \cdot i. \tag{2.1}$$

Ein Vergleich mit Formel (1.2) macht klar: Im Sinne der Prozentrechnung ist Z der Prozentwert zum Grundwert K mit dem Prozentsatz i bzw. dem Prozentfuß p. Es gilt demnach gemäß (1.1) und (1.2)

$$\frac{Z}{K} = i = \frac{p}{100}. \tag{2.2}$$

Definition 2.1: *Zinssatz*

In der Zinsrechnung bezeichnet man i gem. (2.2) als **Zinssatz** bzw. **Zinsrate** (engl.: *interest rate* bzw. nur *rate*) und p als **Zinsfuß** der Zinsperiode. Wenn die Zinsperiode ein Jahr beträgt, so ist i der **Jahreszinssatz** bzw. die **Jahreszinsrate** und p der **Jahreszinsfuß**.
Der Faktor $q = 1 + i$ heißt **Verzinsungsfaktor** (auch **Aufzinsungsfaktor**, engl.: *accumulation factor*) und sein reziproker Wert $d = 1/(1 + i)$ **Abzinsungs-** bzw. **Diskontierungsfaktor** (engl.: *reduction factor*) zum Zinssatz i.

Bemerkungen:
1. In nahezu allen praktischen Anwendungen gilt $i \geq 0$, weil negative Zinsen wirtschaftlich unsinnig sind. Wir wollen dies ab sofort auch voraussetzen (Ausnahme: Rendite in Kapitel 7). Es sei aber darauf hingewiesen, dass viele Formeln formal auch für $i < 0$ richtig bleiben.
2. Setzt man $K = 1$, so erkennt man, dass i auch interpretiert werden kann als der *Zins auf ein Kapital der Höhe* 1.

Beispiel 2.1 (Fortsetzung): *Zinssatz, Auf- und Abzinsungsfaktor*

Der Bankkunde hat monatlich 100 € Zinsen zu zahlen. Wie lauten bei dem Darlehen (Kapital) von 10.000 € der (monatliche) Zinssatz, Zinsfuß, Aufzinsungs- und Diskontierungsfaktor?

Lösung: Zinssatz $i = \frac{Z}{K} = \frac{100\,€}{10.000\,€} = 1\%$, zugehöriger Zinsfuß $p = 1$, Aufzinsungsfaktor $q = 1{,}01$ und Diskontierungsfaktor $d = \frac{1}{1{,}01} \approx 0{,}990099$. ■

Aus (2.2) erhält man sofort

$$q = 1 + i = 1 + \frac{Z}{K} = \frac{K + Z}{K},$$

der Aufzinsungsfaktor gibt also das Verhältnis von Kapital plus Zinsen zum Kapital nach einer Zinsperiode wieder. Mit ihm muss man das Anfangskapital (den sog. **Anfangs-** oder **Barwert**) multiplizieren, um das Endkapital inkl. Zinsen (den sog. **Endwert**) nach einer Periode zu erhalten. Mit dem Diskontierungsfaktor ist hingegen das Endkapital zu multiplizieren, um das Anfangskapital zu Beginn der Periode zu bestimmen.

Oft wird das Anfangskapital bzw. der Barwert auch mit $K_0 = K$ bezeichnet. Nach Fälligkeit der Zinsen hat sich also daraus am Ende der Zinsperiode der Endwert

$$K_1 = K_0 + Z \underset{(2.1)}{=} K_0(1+i) = K_0 q \tag{2.3}$$

entwickelt. Aufgrund unserer Voraussetzung Z1 ist der Zinssatz i und damit der Aufzinsungsfaktor q unabhängig von der Größe K_0. Damit stellt q die *charakteristische Größe* des 1-Perioden-Modells dar (Bild 2.3).

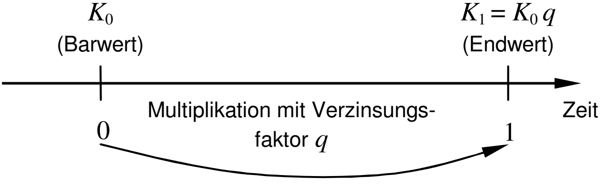

Bild 2.3:
Barwert und Endwert im 1-Perioden-Modell

Wir wollen mit i den *Perioden*zinssatz bezeichnen, auch wenn die Zinsperiode nur ein Bruchteil des Jahres ist (auf Ausnahmen wird ausdrücklich hingewiesen). Nach (2.1) sind in der Zinsperiode Zinsen in Höhe von $Z = iK$ fällig und der Verzinsungsfaktor hat dann die Gestalt $q = 1 + i$. In der Literatur symbolisiert i gelegentlich den *Jahres*zinssatz. Unsere Bezeichnungsweise bringt jedoch den Vorteil *einheitlicher Formeln* mit sich, unabhängig davon, wie lang eine Zinsperiode tatsächlich ist. In den praktischen Anwendungen ist darauf stets zu achten.

Bei mehreren Zinsabrechnungen pro Jahr stellt sich die Frage, welcher Periodenzinssatz bei gegebenem Jahreszinssatz anzuwenden ist. Wir gehen später darauf noch genauer ein. In der Finanzwirtschaft war es bisher üblich, dass bei mehreren Zinsfälligkeiten pro Jahr derjenige Anteil der Jahreszinsen gezahlt wird, der dem Verhältnis der Länge einer Zinsperiode zur Länge eines Jahres entspricht. Besteht ein Jahr also aus m Zinsperioden ($m \in \mathbb{N}$ wegen Z2) und ist i_{Jahr} der Jahreszinssatz, so hieße das

$$\frac{Z}{m} = \frac{i_{\text{Jahr}}}{m} K.$$

Diese Verfahrensweise entspricht auch der alten Preisangabenverordnung (PAngV) von 1985, die bis 2002 gültig war. Der Periodenzinssatz beträgt demnach $i = i_{\text{Jahr}}/m$, also der m-te Teil des Jahreszinssatzes. Man nennt ihn den **linear proportionalen Zinssatz** zum Jahreszinssatz i_{Jahr}. Im Abschnitt 2.6 werden wir

Sachwortverzeichnis